

**Fundamentallösungen partieller  
Differenzenoperatoren  
und die Lösung diskreter Randwertprobleme  
mit Hilfe von Differenzenpotentialen**

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doctor rerum naturalium

an der Fakultät Bauingenieurwesen  
der Bauhaus– Universität Weimar

vorgelegt von

**Dipl.–Math. Angela Hommel**

aus Chemnitz

am 18. Juni 1997

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. K. Gürlebeck  
Prof. Dr. rer. nat. habil. L. Jentsch  
Prof. Dr. rer. nat. habil. E. Meister

Tag der Disputation: 16. Januar 1998

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
1 Diskrete Fundamentallösungen	8
1.1 Diskrete Fouriertransformation	9
1.1.1 Definition der diskreten Fouriertransformation	9
1.1.2 Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation	10
1.2 Überblick über die diskreten Fundamentallösungen	11
1.2.1 Die Fundamentallösung elliptischer Operatoren	11
1.2.2 Fundamentallösungen für Gleichungssysteme	29
1.2.3 Instationäre Probleme	35
1.2.4 Ausgewählte kanonische Probleme	37
2 Theorie der Differenzenpotentiale	44
2.1 Diskrete Potentiale und Greensche Formeln	45
2.1.1 Grundlagen für die Bearbeitung innerer Probleme	45
2.1.2 Grundlagen für die Bearbeitung äußerer Probleme	51
2.2 Eindeutigkeitssätze	57
2.3 Potentialansätze für Randwertprobleme	61
2.3.1 Äußeres Neumannproblem	62
2.3.2 Inneres Neumannproblem	63
2.3.3 Inneres Dirichletproblem	65
2.3.4 Äußeres Dirichletproblem	66
3 Approximation und Konvergenz	69
3.1 Gleichmäßige Beschränktheit der diskreten Operatoren	70
3.2 Konvergenzresultate	74
3.2.1 Approximationsaussagen	74
3.2.2 Konvergenz der diskreten Lösung	85
4 Numerisch erzielte Resultate	89
4.1 Lösung innerer Randwertprobleme	90
4.2 Lösung äußerer Randwertprobleme	96
Literaturverzeichnis	103

# Einleitung

Die klassische Potentialtheorie ist eine bewährte Methode zur Lösung von Randwertproblemen. Eine Vielzahl an fundamentalen Erkenntnissen auf diesem Gebiet findet man bereits in den Standardwerken von MICHLIN [Mi], SMIRNOW [Sm1] und GUENTER [Guen]. Die gegenwärtige Aktualität wird beispielsweise durch die Arbeiten von HACKBUSCH [Ha], KRESS [Kr], LANDKOF [Lan], aber auch durch die im Rahmen des DFG-Schwerpunktes "Randelementmethoden" erzielten Resultate aus den Arbeitsgruppen von WENDLAND, MEISTER und JENTSCH untermauert. Diese Aufzählung ist bei weitem nicht vollständig. Dennoch erhält man anhand der Arbeiten einen Eindruck von der Methode, deren Wesen darin besteht, durch geeignete Potentialansätze die im Gebiet zu untersuchende Differentialgleichung mit Hilfe einer Integralgleichung auf dem Rand zu lösen. Beide Gleichungen sind in Bezug auf die Lösbarkeit äquivalent. Die Integralgleichung läßt sich jedoch analytisch besser studieren. Darüber hinaus ist die Reduktion der Dimension ein numerisch sehr wertvoller Aspekt. Ein weiterer Vorteil der potentialtheoretischen Methode besteht in der Möglichkeit, Außenraumaufgaben sehr effektiv bearbeiten zu können. Im Unterschied zur Lösung des Randwertproblems im unendlichen Gebiet mit Hilfe eines Differenzenverfahrens oder der Methode der finiten Elemente besteht der Vorteil darin, daß lediglich eine Integralgleichung auf dem endlichen Rand zu lösen ist. Die bei Außengebieten gewöhnlich auftretende Schwierigkeit der Einführung eines künstlichen Randes entfällt.

Beim numerischen Lösen der Integralgleichung auf dem Rand wird in der Regel nach geeigneten Quadraturformeln gesucht. Diese führen jedoch zu einem qualitativen Verlust an potentialtheoretischen Eigenschaften. Insbesondere geht die Äquivalenz zum Ausgangsproblem verloren. Außerdem besteht die Gefahr, daß physikalische Merkmale nur schlecht oder überhaupt nicht widergespiegelt werden, wenn im Innern des Gebietes die Differentialgleichung nur näherungsweise erfüllt ist. Bei der Wahl der Quadraturformeln ist darauf zu achten, daß die auftretenden Potentiale in Randnähe ein fast singuläres Verhalten aufweisen. Speziell an diesen Stellen ist eine besonders genaue Approximation der Integrale anzustreben. Darüber hinaus sind sorgfältige Fehlerabschätzungen notwendig, da sich Näherungsfehler beim Lösen der Gleichung auf dem Rand über die Potentiale bis zur Lösung im Inneren des Gebietes fortpflanzen können. Eine der bekanntesten Methoden zum Lösen der Randintegralgleichung ist die Rand-Element-Methode. Sie beruht auf der Diskretisierung der Randgleichung durch geeignete Spline-Ansätze.

In der vorliegenden Arbeit wird ein potentialtheoretischer Zugang beschrieben, der die im Zusammenhang mit Quadraturformeln auftretenden Schwierigkeiten nicht aufweist. Ausgangspunkt ist die Approximation des Randwertproblems durch ein Differenzenrandwertproblem auf einem gleichmäßigen Gitter der Schrittweite  $h$ . Analog zur Vorgehensweise im kontinuierlichen Fall wird die Lösung der diskreten

Aufgabe mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems auf dem Rand bestimmt. Dieses Gleichungssystem entsteht durch einen speziellen Ansatz mit Differenzenpotentialen, wobei jeder einzelne Teilschritt unmittelbar numerisch umgesetzt werden kann. Erst am Ende steht die Frage nach der Konvergenz der diskreten Lösung gegen die Lösung der Differentialgleichung. Die folgende Abbildung soll den konkreten Zusammenhang zwischen dem klassischen und dem diskreten Zugang noch einmal verdeutlichen:

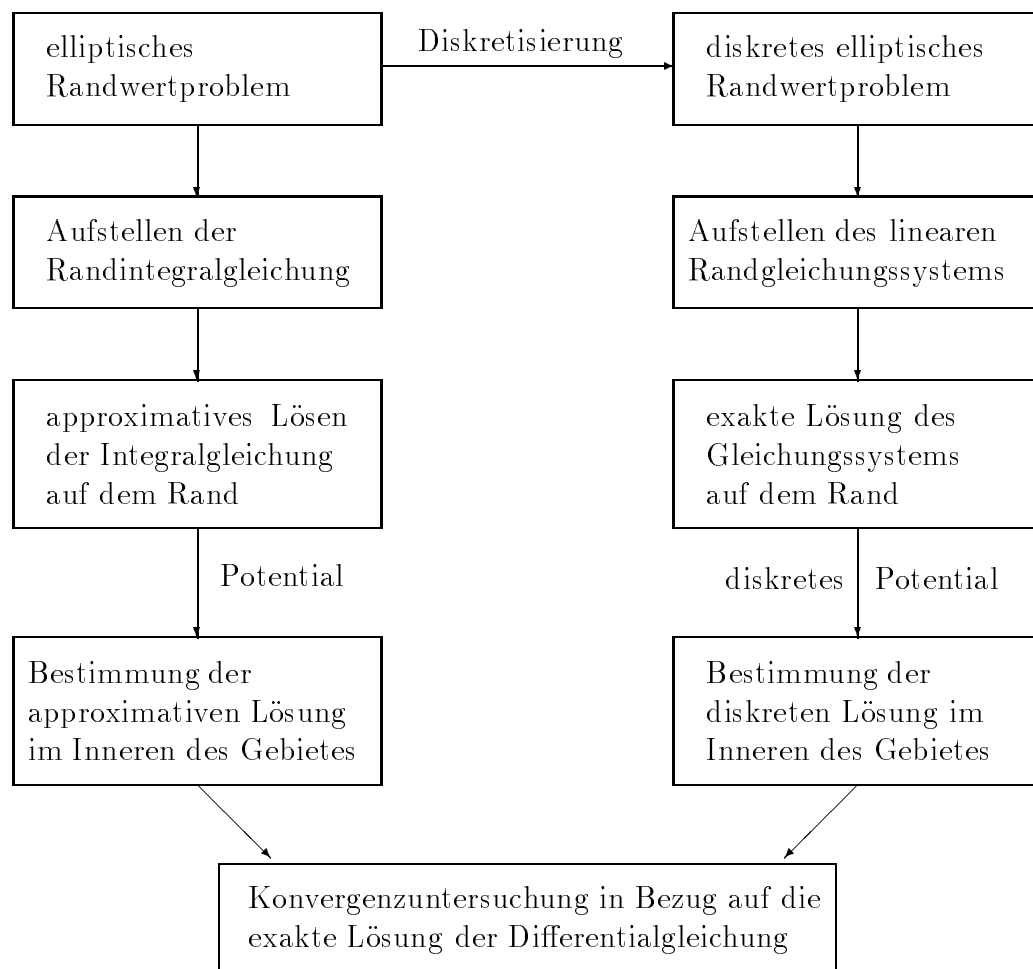


Abb.1

Für den Aufbau der Theorie der Differenzenpotentialen ist die Existenz einer diskreten Fundamentallösung oder einer Greenschen Funktion von grundlegender Bedeutung. Untersuchungen auf diesem Gebiet sind daher als Ausgangspunkt und zugleich als wesentlicher Schwerpunkt dieser Arbeit zu betrachten. In der Literatur findet man zu dieser Problematik bereits eine Reihe wichtiger Erkenntnisse und Anregungen:

RYABENKIJ [Ry1] arbeitet vordergründig mit der Greenschen Funktion in einem Quadrat, welches das von ihm betrachtete Gebiet enthält. Darüber hinaus beschreibt er Fundamentallösungen in Form von Kurvenintegralen, die jedoch in Bezug auf das

Verhalten im Unendlichen von den kontinuierlichen Fundamentallösungen deutlich abweichen. Auch in der erst 1996 erschienenen Arbeit [Ry2] verzichtet RYABENKIJ bewußt auf diskrete Fundamentallösungen, um die von ihm angestrebte Methode auch zur Lösung von Problemen mit variablen Koeffizienten einsetzen zu können.

Fundamentallösungen für elliptische Differenzenrandwertprobleme wurden beispielsweise von SOBOLEV, STUMMEL, THOMÉE, BOOR/HÖLLIG/RIEMENSCHNEIDER und DUFFIN untersucht, wobei SOBOLEV [So1],[So2] speziell die Fundamentallösung der Laplacegleichung in der Ebene in Bezug auf die Eindeutigkeit und das Verhalten im Unendlichen studiert.

Im Zusammenhang mit Lösbarkeitsaussagen für diskrete Variationsmethoden werden von STUMMEL [Stu] diskrete Fundamentallösungen mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation berechnet. Diese Vorgehensweise ermöglicht die systematische Beschreibung der Fundamentallösungen in Form von Integraldarstellungen.

THOMÉE [Th1] hat die Existenz dieser in Integralform gegebenen Fundamentallösungen untersucht. In Abhängigkeit von der Raumdimension und der Ordnung des Differenzenoperators arbeitet er Sonderfälle heraus, in denen Änderungen im Fourierintegral erforderlich sind. Die dabei auftretenden Integranden sind rationale trigonometrische Funktionen, deren Zähler aus einer komplexwertigen Exponentialfunktion besteht und deren Nenner nur im Koordinatenursprung eine Nullstelle besitzt. Die Existenz dieser Fourierintegrale in der Nähe der Nullstelle des Nenners wird durch die Regularisierung der Integrale gesichert. THOMÉE beweist außerdem Aussagen zum asymptotischen Verhalten der Differenzenableitungen der diskreten Fundamentallösungen. Er führt jedoch keine Konvergenzuntersuchungen durch.

BOOR, HÖLLIG und RIEMENSCHNEIDER gehören zu den Vertretern einer weiteren Entwicklungsrichtung auf dem Gebiet der diskreten Fundamentallösungen. Sie untersuchen in der Arbeit [BHR] die Existenz von Fundamentallösungen in bisher nicht betrachteten, allgemeinen Fällen. Insbesondere kann der Nenner des Integranden mehrere Nullstellen besitzen. In Bezug auf das Verhalten im Unendlichen sind die von BOOR/HÖLLIG/RIEMENSCHNEIDER erzielten Resultate auf Grund der Allgemeingültigkeit seiner Aussagen schwächer als die mit anderen Methoden bewiesenen Resultate für einige Spezialfälle.

Enge Beziehungen zu den Arbeiten von DUFFIN [Du1] und GÜRLEBECK [Gue1] bestehen bei der Berechnung der Fundamentallösung für die Cauchy–Riemann–Gleichungen. Man beachte insbesondere den konkreten Zusammenhang zur Fundamentallösung des Laplaceoperators.

Bei der Berechnung von diskreten Fundamentallösungen für spezielle Probleme der Elastizitätstheorie werden erstmals Gleichungssysteme gelöst. Die Integralform der diskreten Fundamentallösung des Lamésystems findet man bereits in der Arbeit von LASAREW/ CHIKIN [LC]. Dabei wird jedoch die Einschränkung der Lösung auf das Gitter nicht deutlich genug herausgearbeitet.

Zu Fundamentallösungen instationärer Probleme existieren bis heute nur wenige Arbeiten. Während PFEIFFER und RAUHÖFT Fundamentallösungen für Differenzoperatoren in kontinuierlichen Distributionenräumen untersuchen, arbeiten MAEDA/ MURAKAMI und YAMASAKI [MMY] mit Graphen und speziellen Netzwerken. In der Arbeit GÜRLEBECK/HOMMEL [GH1] wird die Fundamentallösung der Wärmeleitgleichung für die explizit und implizit gegebene Differenzengleichung berechnet und das Konvergenzverhalten im Raum  $l_p$  untersucht.

In Analogie zum kontinuierlichen Fall werden die diskreten Fundamentallösungen für kanonische Probleme auf der Grundlage des Spiegelungsprinzips berechnet. Aus der Literatur sind keine Aussagen zu diesen Fundamentallösungen bekannt.

Greensche Funktionen haben den Nachteil, daß bei jeder kleinen Veränderung des betrachteten Gebietes neue Berechnungen erforderlich sind. Aus diesem Grund wird im Kapitel 1 dieser Arbeit nur ein Überblick über diskrete Fundamentallösungen gegeben. Integraldarstellungen für diese Fundamentallösungen erhält man in Analogie zu STUMMEL mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation, wobei eine notwendige Regularisierung des Fourierintegrals entsprechend der Vorgehensweise von THOMÉE durchgeführt wird. Darüber hinaus kann für die Fundamentallösung der biharmonischen Gleichung eine weitere Korrekturmöglichkeit angegeben werden. Im Unterschied zu den bisherigen Untersuchungen steht die Frage nach der Konvergenz im Mittelpunkt, da die diskreten Fundamentallösungen die Grundlage für die Differenzenpotentiale bilden. Dabei zeigt sich, daß die von SOBOLEV und THOMÉE betrachtete Fundamentallösung der Laplacegleichung in der Ebene nicht das gewünschte Konvergenzverhalten aufweist. Betont sei, daß die in dieser Arbeit erzielten Konvergenzresultate im Gegensatz zu den allgemeinen Ausführungen von BOOR/HÖLLIG/RIEMENSCHNEIDER eine genaue Untersuchung der einzelnen Differenzengleichungen voraussetzen.

Der Idee von RYABENKIJ folgend, wird im Kapitel 2 mit Hilfe der diskreten Fundamentallösung der Laplacegleichung in der Ebene ein Differenzenpotential definiert. Von dieser Definition hängt die Analogie zu den kontinuierlichen Aussagen ganz entscheidend ab. Auf Grund der sehr ausführlichen Betrachtung der Fundamentallösungen im Kapitel 1 kann die konkret gewählte Vorgehensweise auch auf andere Problemstellungen übertragen werden. Ausgangspunkt der Überlegungen ist das folgende Theorem, das man beispielsweise in der Arbeit von SEELEY [See] findet:

*Es seien  $X, Y$  und  $Z$  Banachräume. Vorausgesetzt wird*

1.  $L : X \rightarrow Y$  ist ein rechtsinvertierbarer Operator.  
*Der Rechtsinverse wird mit  $V$  bezeichnet.*
2.  $Tr : X \rightarrow Z$  ist ein verallgemeinerter Spuroperator.
3. Die Eindeutigkeitsbedingung  $\ker L \cap \ker Tr = \{0\}$  ist erfüllt.

Definiert man  $P = I - VL$  und  $P_\Gamma = \text{Tr } P$ , wobei  $I$  den identischen Operator bezeichnet, dann gelten die folgenden Eigenschaften:

1.  $\ker L \cap \ker \text{Tr} = \{0\} \iff \ker \text{Tr} \subset \ker P$
2.  $Pu = P(\text{Tr } u) = P\xi \implies P : Z \rightarrow X$
3.  $P_\Gamma : Z \rightarrow Z$
4.  $P^2 = P, P_\Gamma^2 = P_\Gamma$
5.  $P_\Gamma \xi = \xi \iff \xi = \text{Tr } u, \quad u \in \ker L$
6.  $u = P\xi + VLu, \quad \xi = P_\Gamma \xi + \text{Tr } VLu$

Deutlich wird der Zusammenhang mit den potentialtheoretischen Eigenschaften des Laplaceoperators, wenn man speziell  $L = -\Delta$  und  $\text{Tr } u = (u_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma)$  wählt. Während die Eigenschaft 6 der Integraldarstellung für Funktionen aus  $C^2$  entspricht, kann die Eigenschaft 5 in der Form der bekannten Integralgleichungen geschrieben werden. Die unmittelbare Grundlage für die Definition eines Randpotentials bildet die Eigenschaft 2. Der Definitionsbereich des Operators  $P$  wird tatsächlich nur durch die Randdaten  $\xi = \text{Tr } u$  bestimmt, da auf Grund der Eigenschaft 1 für zwei Funktionen  $u_1$  und  $u_2$  mit  $\text{Tr } u_1 = \text{Tr } u_2$  die Beziehung  $Pu_1 = Pu_2$  gilt. Im diskreten Fall setzt man  $L = -\Delta_h$ . Zu beachten ist, daß die Approximation im Gebiet und auf dem Rand nur dann angepaßt ist, wenn die Voraussetzung 3 des Theorems erfüllt ist. In Analogie zur Integraldarstellung für Funktionen aus  $C^2$  erhält man mit Hilfe der Eigenschaft 6 eine Summendarstellung. Unmittelbar aus dieser Darstellung kann die Definition eines diskreten Differenzenpotentials abgeleitet werden. Die Eigenschaft 5 entspricht einem Gleichungssystem auf dem diskreten Rand.

Umfassende potentialtheoretische Untersuchungen auf der Grundlage dieses Theorems wurden bereits von RYABENKIJ durchgeführt. Die vorliegende Arbeit wird insbesondere auf seiner Beschreibung des diskreten Randes, der konkreten Gestalt der Summendarstellung und der damit verbundenen Definition des Differenzenpotentials aufbauen. RYABENKIJ arbeitet ferner den Zusammenhang zwischen der Lösbarkeit der Differenzenrandwertaufgabe und der Lösbarkeit des entsprechenden Randgleichungssystems heraus. Seine Resultate sind jedoch an starke Verträglichkeitsbedingungen in Bezug auf die rechte Seite der Differenzengleichung und deren Ableitungen gebunden. Eine geeignete Zerlegung des Differenzenpotentials in ein diskretes Einfach- und Doppelschichtpotential wird nicht angegeben. Dadurch fehlt gleichzeitig auch die Information zur Beschreibung der diskreten Normalableitung. Außerdem sind die von RYABENKIJ aufgestellten Randgleichungssysteme überbestimmt. Eine Lösung dieser Systeme kann nur mit Hilfe von Minimierungsaufgaben gewonnen werden. Ganz offensichtlich entsteht an dieser Stelle ein Bruch zwischen dem diskreten Zugang und der von MICHLIN [Mi] und GUENTER [Guen] vorgestellten potentialtheoretischen Methode, der auch durch den universellen Einsatz der von RYABENKIJ betrachteten Differenzenpotentiale nicht zu unterschätzen ist.

Das daraus resultierende Problem wird in dieser Arbeit durch die Zerlegung des Differenzenpotentials in ein diskretes Einfach- und Doppelschichtpotential bewältigt, wobei sich die Untersuchungen insbesondere auf die diskrete Laplacegleichung in der Ebene beziehen. Aus theoretischer und numerischer Sicht wird dadurch ein beachtlicher Fortschritt erzielt. Studiert man die Eigenschaften des diskreten Einfach- und Doppelschichtpotentials genauer, dann erkennt man die enge Verwandtschaft mit den klassischen Potentialen. Durch die Zerlegung des Potentials können Differenzenrandwertprobleme mit Hilfe von geeigneten Potentialansätzen gelöst werden, wenn die Lösbarkeit der entstehenden Randgleichungssysteme gesichert ist.

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Lösbarkeitsaussagen bewiesen, die mit dem diskreten Einfachschichtpotential zusammenhängen. Voraussetzung dafür sind die Eindeutigkeitssätze für diskrete Dirichlet- und Neumannprobleme in Innen- und Außengebieten, die unter Verwendung von diskreten Greenschen Formeln bewiesen werden. Auf Grund der Äquivalenz zum Ausgangsproblem erhält man gleichzeitig Aussagen zur Lösbarkeit des Differenzenrandwertproblems. Ein Vergleich mit den von SAMARSKIJ bewiesenen Resultaten für die diskrete Laplacegleichung zeigt, daß die Ergebnisse weitgehend übereinstimmen. In dieser Arbeit werden die entsprechenden Aussagen jedoch ausschließlich mit potentialtheoretischen Methoden erzielt. Die dabei zu führenden Beweise beruhen nicht auf dem Maximumprinzip, so daß eine Verallgemeinerung der Theorie, insbesondere auf elastische Probleme sowie andere allgemeine Differentialgleichungssysteme, möglich erscheint.

Im Mittelpunkt von Kapitel 3 stehen sowohl Konvergenzbetrachtungen für das diskrete Volumen- und Einfachschichtpotential in den Räumen  $c$  und  $l_p$ , als auch Konvergenzaussagen in Bezug auf die diskrete Lösung. Darüber hinaus wird die gleichmäßige Beschränktheit der diskreten Operatoren gezeigt.

In der Möglichkeit der unmittelbaren numerischen Realisierung der theoretischen Ergebnisse ist ein ganz entscheidender Vorteil der vorgestellten Methode zu sehen. Zu gewährleisten ist jedoch eine praktikable und hinreichend genaue Berechnung der diskreten Fundamentallösung. Die im Kapitel 4 vorgestellten numerischen Resultate beziehen sich auf Differenzenrandwertprobleme, die mit der Laplacegleichung in der Ebene zusammenhängen. Für die entsprechende diskrete Fundamentallösung wird im Kapitel 1 dieser Arbeit eine einfache Vorschrift zur Berechnung in den Gitterpunkten entlang der Hauptdiagonalen angegeben. Die Bestimmung der Lösung in den übrigen Gitterpunkten erfordert nur wenige Rechenoperationen, da lediglich die Operatorgleichung und die vorhandenen Symmetrieeigenschaften benutzt werden. Auf diese Möglichkeit der Berechnung der Fundamentallösung des diskreten Laplaceoperators verweisen bereits SOBOLEV [So2] und VAN DER POL [vdP]. Man beachte, daß auch an dieser Stelle das Prinzip der Dimensionsreduktion wirksam wird. Eine Übertragung dieser Idee auf andere Gleichungen und andere Symmetriegeraden wird angestrebt.



# Kapitel 1

## Diskrete Fundamentallösungen

Das Ziel dieser Arbeit besteht im Lösen diskreter Randwertprobleme mit Hilfe der Methode der Differenzenpotentiale, wobei auf einem gleichmäßigen Gitter der Schrittweite  $h$  gearbeitet wird. Voraussetzung dafür ist die Existenz einer diskreten Fundamentallösung oder Greenschen Funktion. Um deutlich zu machen, daß diese Voraussetzung bei einer Vielzahl von Problemen erfüllt ist, wird in diesem Kapitel ein Überblick über diskrete Fundamentallösungen und deren Eigenschaften gegeben.

Es sei  $A_h$  ein Differenzenoperator des  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raumes. Jede Lösung der Gleichung

$$(A_h u_h)(x) = \delta_h(x) = \begin{cases} h^{-n} & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

heißt im Sinne von BOOR, HÖLLIG und RIEMENSCHNEIDER [BHR] *diskrete Fundamentallösung*, wenn sie im Unendlichen nicht schneller als  $|x|^m$  wächst. Dabei hängt die Potenz  $m > 0$  von der konkreten Gestalt des Differenzenoperators ab. In einigen Spezialfällen ist es jedoch vorteilhaft, die Definition der diskreten Fundamentallösung in Bezug auf das Verhalten im Unendlichen zu präzisieren. Auf diese Besonderheit wird an den konkret betreffenden Stellen hingewiesen.

In Analogie zu STUMMEL [Stu] werden die diskreten Fundamentallösungen mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation berechnet. Die konkrete Vorgehensweise wird am Beispiel der Laplacegleichung demonstriert. Die dadurch gewonnenen Integraldarstellungen ermöglichen die gezielte Untersuchung der Eigenschaften der diskreten Fundamentallösungen. Von besonderem Interesse sind Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit, zum asymptotischen Verhalten und zur Konvergenz. Während einige Resultate bereits aus der Literatur bekannt sind, kommt durch die Konvergenzanalyse meist ein neuer Gesichtspunkt hinzu. Da die Fundamentallösung im Kern der zu studierenden Differenzenpotentiale steht und deren Konvergenzverhalten ganz

wesentlich beeinflußt, werden Abschätzungen angestrebt, aus denen die Konvergenzgeschwindigkeit hervorgeht. Auf Grund der sehr komplizierten Struktur der Integraldarstellungen ist in vielen Fällen kein unmittelbar praktikabler Weg zur Berechnung der Fundamentallösungen ersichtlich. Da aber ein wesentlicher Vorteil der diskreten Methode in der Möglichkeit der direkten numerischen Realisierung liegt, wird dieser Problematik in der vorliegenden Arbeit besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

Einen zentralen Platz nimmt die Untersuchung der diskreten Fundamentallösung der Laplacegleichung in der Ebene ein, da sie die Grundlage für die potentialtheoretischen Untersuchungen im Kapitel 2 bildet. Neben einigen grundlegenden Eigenschaften werden Aussagen bewiesen, die bei den Konvergenzbetrachtungen zu den Differenzenpotentialen im Kapitel 3 von Bedeutung sein werden.

Das breite Spektrum der untersuchten diskreten Fundamentallösungen soll die Übertragung der wesentlichen potentialtheoretischen Schritte auf andere Probleme ermöglichen, wobei auch hier Konvergenzaussagen von entscheidender Bedeutung sind. Darüber hinaus erhält man Anhaltspunkte zur Berechnung weiterer Fundamentallösungen, wenn bei der Diskretisierung der Operatoren im Gebiet und auf dem Rand die Voraussetzung 3 aus dem allgemeinen Theorem von SEELEY erfüllt ist.

## 1.1 Diskrete Fouriertransformation

### 1.1.1 Definition der diskreten Fouriertransformation

Es sei  $\mathbb{R}^n$  der  $n$ -dimensionale Euklidische Raum. Über diesem Raum wird durch  $\mathbb{R}_h^n = \{i_1 h, i_2 h, \dots, i_n h\}$  mit  $i_k \in \mathbb{Z}$ ,  $k = 1, \dots, n$  ein gleichmäßiges Gitter der Schrittweite  $h > 0$  definiert. Weiterhin sei  $l_2(\mathbb{R}_h^n)$  der Vektorraum aller komplexwertigen, auf  $\mathbb{R}_h^n$  erklärten Funktionen  $u_h$  mit der Eigenschaft  $\sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} |u_h(x)|^2 < \infty$ .

Durch das Skalarprodukt  $\langle u_h, v_h \rangle = h^n \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} u_h(x) \overline{v_h(x)}$  wird  $l_2(\mathbb{R}_h^n)$  zu einem Hilbertraum mit der Norm  $\|u_h\|_{l_2(\mathbb{R}_h^n)} = \langle u_h, u_h \rangle^{1/2}$ .

Die von STUMMEL angegebene Vorschrift zur Berechnung der Fouriertransformierten einer Funktion  $u_h \in l_2(\mathbb{R}_h^n)$  lautet

$$(F_h u_h)(\xi) = \begin{cases} \frac{h^n}{\sqrt{2\pi}^n} \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} u_h(x) e^{ix\xi} & \xi \in Q_h \\ 0 & \xi \in \mathbb{R}^n \setminus Q_h. \end{cases}$$

Dabei ist  $Q_h = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : -\frac{\pi}{h} < \xi_i < \frac{\pi}{h}, \quad i = 1, \dots, n \right\}$  und  $x\xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ . Betrachtet man zusätzlich den Raum  $L_2^o(Q_h) = \{u \in L_2(\mathbb{R}^n) : u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus Q_h\}$ ,

dann kann man beweisen, daß die Abbildung  $F_h : l_2(\mathbb{R}_h^n) \rightarrow L_2^o(Q_h)$  umkehrbar eindeutig, linear und isometrisch ist. Unter Einbeziehung der Fouriertransformation

$$(FF_h u_h)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (F_h u_h)(\xi) e^{-ix\xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

gilt nach STUMMEL [Stu] die Parsevalsche Gleichung in der Form

$$\langle u_h, v_h \rangle_{l_2(\mathbb{R}_h^n)} = (F_h u_h, F_h v_h)_{L_2^o(Q_h)} = (FF_h u_h, FF_h v_h)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

mit den Skalarprodukten  $(u, v)_{L_2^o(Q_h)} = \int_{Q_h} u(x) \overline{v(x)} dx$  und  $(u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \overline{v(x)} dx$ .

### 1.1.2 Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation

Die Berechnung der diskreten Fundamentallösungen erfolgt auf der Grundlage der im folgenden angegebenen Eigenschaften. Sie verdeutlichen vor allem den Zusammenhang zwischen den Fouriertransformationen  $F$  und  $F_h$ . Einige der Merkmale wurden ebenfalls aus der Arbeit von STUMMEL [Stu] übernommen.

Es sei  $u$  eine Funktion aus dem Raum  $L_2(\mathbb{R}^n)$  und  $u_h$  eine auf dem Gitter  $\mathbb{R}_h^n$  erklärte  $l_2$ -Funktion. Weiterhin sei  $I$  der identische Operator,  $e_j$  der  $j$ -te Einheitsvektor im Raum  $\mathbb{R}^n$  und  $\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}$  die partielle Ableitung der Funktion  $u(x)$  nach  $x_j$ . Durch  $D_j = h^{-1}(U_j - I)$  mit  $U_j u_h(x) = u_h(x + he_j)$  und  $D_{-j} = h^{-1}(I - U_{-j})$  mit  $U_{-j} u_h(x) = u_h(x - he_j)$  werden Differenzenoperatoren definiert. In Analogie zur Anwendung des Laplaceoperators  $-\Delta u(x) = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}$  wird die diskrete Schreibweise  $-\Delta_h u_h(x) = -\sum_{j=1}^n D_{-j} D_j u_h(x)$  verwendet. Darüber hinaus sei  $im F$  der Bildbereich der Fouriertransformation  $F$ ,  $R_h u$  die Einschränkung von  $u$  auf das Gitter  $\mathbb{R}_h^n$  und  $R_Q u$  die Einschränkung von  $u$  auf den Quader  $Q_h$ . Es gilt:

1.  $R_h F F_h u_h = u_h, \quad u_h \in l_2(\mathbb{R}_h^n),$   
(  $F_h^{-1} = R_h F : L_2^o(Q_h) \rightarrow l_2(\mathbb{R}_h^n)$  ist die Inverse der diskreten Fouriertransformation)
2.  $F_h R_h F u = u \quad \text{für } u \in L_2^o(Q_h)$
3.  $F F_h R_h u = u \quad \text{für } u \in im F \{L_2^o(Q_h)\} \cap L_2$
4.  $F(-\Delta u) = |\xi|^2 F u \quad \text{mit } |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$
5.  $F_h(-\Delta_h u_h) = d^2 F_h u_h \quad \text{mit } d^2 = \frac{4}{h^2} \left( \sin^2 \frac{h\xi_1}{2} + \sin^2 \frac{h\xi_2}{2} + \dots + \sin^2 \frac{h\xi_n}{2} \right)$
6.  $-\Delta(F u) = F |\xi|^2 u$

7.  $-\Delta(F_h u_h) = F|\xi|^2 F^{-1} F_h u_h$
8.  $-\Delta_h(R_h F u) = F_h^{-1} d^2 F_h R_h F u$
9.  $-\Delta_h(R_h F_h u_h) = F_h^{-1} d^2 F_h R_h F_h u_h$
10.  $F_h(D_j u_h) = -\eta_{-j} F_h u_h, \quad j = 1, \dots, n, \quad \eta_{-j} = h^{-1} (1 - e^{-ih\xi_j})$
11.  $F_h(D_{-j} u_h) = \eta_j F_h u_h, \quad j = 1, \dots, n, \quad \eta_j = h^{-1} (1 - e^{ih\xi_j})$
12.  $D_j(R_h F u) = -F_h^{-1} \eta_{-j} F_h R_h F u, \quad j = 1, \dots, n$
13.  $D_{-j}(R_h F u) = F_h^{-1} \eta_j F_h R_h F u, \quad j = 1, \dots, n$

Mit  $S$  wird die Menge aller Funktionen aus  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet, die für  $|x| \rightarrow \infty$  mit allen Ableitungen schneller gegen Null streben als jede Potenz von  $|x|^{-1}$ . Ein lineares stetiges Funktional über dem Raum  $S$  heißt verallgemeinerte Funktion schwachen Wachstums. Die Menge aller dieser Funktionalen sei  $S'$ . Betrachtet man  $F_h u_h$  als ein Funktional, das die Beziehung  $(F_h u_h, \varphi) = \langle u_h, R_h F R_Q \varphi \rangle_{l_2(\mathbb{R}_h^n)}$  für beliebiges  $\varphi \in S$  erfüllt, dann kann die Definition der diskreten Fouriertransformation verallgemeinert werden. Die angegebenen Eigenschaften können auf analoge Weise in der schwachen Formulierung bewiesen werden.

## 1.2 Überblick über die diskreten Fundamentallösungen

### 1.2.1 Die Fundamentallösung elliptischer Operatoren

#### Die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung im Raum $\mathbb{R}_h^n$

Betrachtet wird die Differenzengleichung

$$-\Delta_h E_h(x) = -\sum_{j=1}^n D_{-j} D_j E_h(x) = \delta_h(x) = \begin{cases} h^{-n} & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

für alle  $x = (x_1, \dots, x_n) = (i_1 h, \dots, i_n h)$  mit  $i_k \in \mathbb{Z}$  und  $k = 1, \dots, n$ . Während im Fall  $n > 2$  die Definition der diskreten Fundamentallösung von BOOR, HÖLLIG und RIEMENSCHNEIDER übernommen werden soll, wird im Fall  $n = 2$  jede Lösung der Gleichung (1.1), die im Unendlichen nicht schneller als  $\ln|x|$  wächst, als Fundamentallösung bezeichnet. Aus den Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation folgt

$$F_h(-\Delta_h E_h(x)) = d^2 F_h E_h(x) \quad \text{und} \quad F_h \delta_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}.$$

Ausgehend von der transformierten Gleichung  $F_h E_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{d^2}$  erhält man mittels inverser Fouriertransformation  $F_h^{-1} = R_h F$  eine Lösung der Gleichung (1.1) in der Form

$$E_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right).$$

Im Raum  $\mathbb{R}_h^3$  gilt

$$E_h(kh, jh, lh) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{e^{-i(kh\xi_1 + jh\xi_2 + lh\xi_3)}}{d^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad k, j, l \in \mathbb{Z},$$

wobei das Integral auf der rechten Seite als uneigentliches Integral existiert. Im Fall  $n = 2$  ist das entsprechende Integral zu regularisieren. Nach der Vorgehensweise von THOMÉE [Th1] wird vom Zähler des Integranden der Anfang der Taylorreihe subtrahiert. Als Fundamentallösung im Raum  $\mathbb{R}_h^2$  erhält man

$$E_h(kh, jh) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{e^{-i(kh\xi_1 + jh\xi_2)} - 1}{d^2} d\xi_1 d\xi_2. \quad (1.2)$$

Diese diskrete Fundamentallösung steht im Mittelpunkt der potentialtheoretischen Untersuchungen im Kapitel 2 und soll deshalb besonders ausführlich studiert werden. Zunächst wird eine Möglichkeit der numerischen Berechnung vorgestellt, auf die bereits SOBOLEV [So2] und VAN DER POL [vdP] verweisen.

## Numerische Realisierung und Eigenschaften der diskreten Fundamentallösung im ebenen Fall

Untersucht wird das Integral (1.2) für  $h = 1$ . Auf Grund der Symmetrieeigenschaften  $E_1(k, j) = E_1(-k, j) = E_1(k, -j) = E_1(j, k)$  ist die Fundamentallösung nur in den Gitterpunkten  $(k, j)$  mit  $k, j \in \mathbb{Z}$  und  $0 \leq j \leq k$  zu bestimmen. SOBOLEV beweist, daß für die Gitterpunkte auf der Hauptdiagonalen

$$E_1(n, n) = -\frac{1}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right), \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

gilt. Andererseits ist  $E_1(0, 0) = 0$  und  $E_1(1, 0) = -1/4$ . Die Kenntnis der Fundamentallösung in diesen Punkten ist ausreichend, um aus der Differenzengleichung und den angegebenen Symmetrieeigenschaften die Lösung  $E_1(k, j)$  auf dem gesamten Gitter ermitteln zu können. Eine einfache Variablensubstitution zeigt, daß allgemein  $E_h(kh, jh) = E_1(k, j)$  gilt.

Im folgenden werden einige Eigenschaften der diskreten Fundamentallösung (1.2) bewiesen:

**Satz 1.1:** (Eindeutigkeitssatz)

Die diskrete Fundamentallösung (1.2) ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Nach SOBOLEV [So 2] wächst die Fundamentallösung  $E_1(k, j)$  im Unendlichen wie  $\ln \sqrt{k^2 + j^2}$ . Es seien  $E_1^1(k, j)$  und  $E_1^2(k, j)$  zwei diskrete Fundamentallösungen. Die Differenz  $E_1^*(k, j) = E_1^1(k, j) - E_1^2(k, j)$  erfüllt in der ganzen Ebene die diskrete Laplacegleichung.  $E_1^*(k, j)$  ist konstant, da nach SOBOLEV [So1] jede Funktion, die in der ganzen Ebene die diskrete Laplacegleichung erfüllt und im Unendlichen nicht schneller als  $\sqrt{k^2 + j^2}$  wächst, eine Konstante ist ■

Nach WLADIMIROW hat die mittels Regularisierung einer Distribution erzeugte kontinuierliche Fundamentallösung in der Ebene die Gestalt

$$E(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int_{|\xi| < 1} \frac{e^{-ix\xi} - 1}{|\xi|^2} d\xi + \int_{|\xi| > 1} \frac{e^{-ix\xi}}{|\xi|^2} d\xi \right) = -\frac{1}{2\pi} (\mathbf{C} - \ln 2 + \ln |x|), \quad (1.3)$$

wobei  $\mathbf{C}$  die Eulersche Konstante ist. Betrachtet wird im folgenden auch die diskrete Fundamentallösung

$$E_h^1(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int_{|\xi| < 1} \frac{e^{-ix\xi} - 1}{d^2} d\xi + \int_{|\xi| > 1, \xi \in Q_h} \frac{e^{-ix\xi}}{d^2} d\xi \right). \quad (1.4)$$

Sie unterscheidet sich von der Fundamentallösung (1.2) durch die von  $h$  abhängige Konstante  $K_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|\xi| > 1, \xi \in Q_h} \frac{1}{d^2} d\xi$ .

**Lemma 1.1:** Für  $h < 1$  gilt  $|E_h^1(x) - E(x)| \leq C_1 h^2 + C_2 \frac{h}{|x|}$ .

**Beweis:** Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} |E_h^1(x) - E(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi| < 1} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) (e^{-ix\xi} - 1) d\xi \right| \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi| > 1, \xi \in Q_h} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) e^{-ix\xi} d\xi \right| \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi| \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_h} \frac{1}{|\xi|^2} e^{-ix\xi} d\xi \right|. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Die einzelnen Ausdrücke werden im weiteren genauer untersucht.

Abschätzung von  $I_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi| < 1} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) (e^{-ix\xi} - 1) d\xi \right|$ :

Mittels Taylorentwicklung und der Beziehung  $d^2 \geq \frac{4}{\pi^2} |\xi|^2$  beweist man die Ungleichung  $0 \leq \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \leq Ch^2$ . Daraus folgt  $I_1 \leq C_{11} h^2 \int_{|\xi| < 1} d\xi = C_{12} h^2$ .

Abschätzung von  $I_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi|>1, \xi \in Q_h} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) e^{-ix\xi} d\xi \right| :$

Aus der partiellen Integration bezüglich  $\xi_1$  resultiert

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi|=1} -\frac{1}{ix_1} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) e^{-ix\xi} \cos(\vec{n}, \xi_1) ds \right| \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^2} \left| -\frac{1}{ix_1} \int_{\xi_2=-\pi/h}^{\pi/h} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) e^{-ix_2\xi_2} \left( e^{-ix_1\pi/h} - e^{ix_1\pi/h} \right) d\xi_2 \right| \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \frac{1}{ix_1} \int_{|\xi|>1, \xi \in Q_h} \left( \frac{2\xi_1}{|\xi|^4} - \frac{2h^{-1} \sin(h\xi_1)}{d^4} \right) e^{-ix\xi} d\xi \right| \\
&\leq C_{21} h^2 \frac{1}{|x_1|} \left( \int_{|\xi|=1} ds + \int_{\xi_2=-\pi/h}^{\pi/h} d\xi_2 \right) + C_{22} \frac{1}{|x_1|} \int_{|\xi|>1, \xi \in Q_h} \left| \frac{2\xi_1}{|\xi|^4} - \frac{2h^{-1} \sin(h\xi_1)}{d^4} \right| d\xi \\
&\leq \frac{1}{|x_1|} C_{23} h,
\end{aligned}$$

wobei  $s$  die Integrationsvariable des Kurvenintegrals sei. Beim Beweis der letzten Ungleichung wird neben der Taylorentwicklung die Eigenschaft  $d^2 \geq \frac{4}{\pi^2} |\xi|^2$  verwendet. Mit  $\vec{n}$  wird allgemein der äußere Normalenvektor bezeichnet, der sich in diesem Zusammenhang auf den Einheitskreis  $|\xi| = 1$  bezieht.

Abschätzung von  $I_3 = \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi| \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_h} \frac{1}{|\xi|^2} e^{-ix\xi} d\xi \right| :$

Aus der partiellen Integration bezüglich  $\xi_1$  folgt

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \frac{1}{ix_1} \int_{\xi_2=-\pi/h}^{\pi/h} \frac{e^{-ix_2\xi_2}}{\pi^2 h^{-2} + \xi_2^2} \left( e^{-ix_1\pi/h} - e^{ix_1\pi/h} \right) d\xi_2 \right| \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{|\xi|=b} -\frac{1}{ix_1} \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} e^{-ix\xi} \cos(\vec{n}, \xi_1) ds \right| \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^2} \left| -\frac{1}{ix_1} \int_{|\xi| \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_h} \frac{2\xi_1}{|\xi|^4} e^{-ix\xi} d\xi \right| \\
&\leq C_{31} \frac{1}{|x_1|} \int_{\xi_2=-\pi/h}^{\pi/h} \frac{1}{\pi^2 h^{-2} + \xi_2^2} d\xi_2 + C_{32} \frac{1}{|x_1|} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{|\xi|=b} \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} ds \\
&\quad + C_{33} \frac{1}{|x_1|} \int_{|\xi| \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_h} \frac{1}{|\xi|^3} d\xi \\
&\leq \frac{1}{|x_1|} C_{34} h.
\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration bezüglich  $\xi_2$  erhält man für die Integrale  $I_2$  und  $I_3$  die obere Schranke  $Ch|x_2|^{-1}$  und für  $k = 2, 3$  folgt aus  $(|x_1|I_k)^2 + (|x_2|I_k)^2 \leq C^2h^2$  die Abschätzung  $|x|^2 I_k^2 \leq C^2h^2$ . Daher gilt  $I_k \leq Ch|x|^{-1}$  und Lemma 1.1 ist vollständig bewiesen ■

Dieses Lemma bildet die Grundlage für das folgende Konvergenzresultat. Es sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet und  $G_h = (G \cap \mathbb{R}_h^2) \subset \mathbb{R}_h^2$  das entsprechende diskrete Gebiet. Weiterhin sei  $A(G_h) = \sum_{x \in G_h} h^2$  und  $Q(G_h)$  ein das Gebiet  $G_h$  umgebendes Quadrat mit dem Mittelpunkt  $(k_1h, k_2h)$  und der Seitenlänge  $L = 2lh$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Zur Vereinfachung des Beweises wird nur der Spezialfall  $k_1 = k_2 = 0$  diskutiert.

**Satz 1.2:** *Es sei  $G_h^* = \{(m_1h, m_2h) \in G_h : m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \text{ und } (m_1, m_2) \neq (0, 0)\}$ . Für jede Schrittweite  $h \leq e^{-1}$  erhält man die  $l_p$ -Abschätzung*

$$\|E_h^1(x) - E(x)\|_{l_p(G_h^*)} \leq \begin{cases} C(L)h & 1 \leq p < 2 \\ Ch\sqrt{|\ln h|} & p = 2 \\ Ch^{2/p} & 2 < p < \infty. \end{cases}$$

**Beweis:** Aus Lemma 1.1 und der Minkowskischen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|E_h^1(x) - E(x)\|_{l_p(G_h^*)} &= \left( \sum_{(m_1h, m_2h) \in G_h^*} |E_h^1(m_1h, m_2h) - E(m_1h, m_2h)|^p h^2 \right)^{1/p} \\ &\leq C_1 h^2 (A(G_h))^{1/p} + C_2 \left\| \frac{h}{|x|} \right\|_{l_p(G_h^*)} \\ &\leq C_1 h^2 (A(G_h))^{1/p} + C_2 \left( 4 \sum_{m_1=1}^l \sum_{m_2=1}^l (m_1^2 + m_2^2)^{-p/2} h^2 + 4 \sum_{s=1}^l s^{-p} h^2 \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Im einzelnen gilt für  $h \leq e^{-1}$

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1=1}^l \sum_{m_2=1}^l (m_1^2 + m_2^2)^{-p/2} h^2 \\ &\leq 2^{-p/2} h^2 + 2 \int_{u=h}^{lh} \left( \frac{h}{u} \right)^p h du + \int_{\varrho=h}^{\sqrt{2}lh} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left( \frac{h}{\varrho} \right)^p \varrho d\varphi d\varrho \\ &\leq \begin{cases} C(L)h & p = 1 \\ C(L)h^p & 1 < p < 2 \\ Ch^2 |\ln h| & p = 2 \\ Ch^2 & p > 2 \end{cases}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

sowie

$$\sum_{s=1}^l s^{-p} h^2 \leq h^2 + \int_{u=h}^{lh} \left( \frac{h}{u} \right)^p h du \leq \begin{cases} Ch^2 |\ln h| & p = 1 \\ Ch^2 & p > 1. \end{cases} \quad (1.8)$$

Durch die Abschätzungen (1.6) - (1.8) ist Satz 1.2 vollständig bewiesen ■



Die Forderung  $h \leq e^{-1}$  im Satz 1.2 ist rein technischer Natur, um im Unterschied zu den Potenzen  $h^p$  mit  $1 \leq p$  die dominierende Rolle der Ausdrücke  $h^p |\ln h|$  zu betonen und auf diese Weise die einzelnen Abschätzungen zu vereinfachen.

Die diskrete Fundamentallösung

$$E_h^2(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int_{|\xi| < 1} \frac{e^{-ix\xi} - 1}{d^2} d\xi + \int_{|\xi| > 1, \xi \in Q_h} \frac{e^{-ix\xi}}{d^2} d\xi + \int_{|\xi| < 1} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) d\xi \right)$$

steht bei der Formulierung von Konvergenzaussagen im unbeschränkten Gebiet im Mittelpunkt. Sie unterscheidet sich von der Fundamentallösung (1.4) durch die von  $h$  abhängige Konstante  $K_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|\xi| < 1} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) d\xi$ .

**Lemma 1.2:** Für  $h < 1$  gilt  $|E_h^2(x) - E(x)| \leq C \frac{h}{|x|}$ .

**Beweis:** In Analogie zur Abschätzung (1.5) erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} |E_h^2(x) - E(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi| < 1} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) e^{-ix\xi} d\xi \right| \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi| > 1, \xi \in Q_h} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) e^{-ix\xi} d\xi \right| + \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi| \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_h} \frac{1}{|\xi|^2} e^{-ix\xi} d\xi \right| \end{aligned}$$

und aus dem Beweis von Lemma 1.1 folgt

$$|E_h^2(x) - E(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi| < 1} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) e^{-ix\xi} d\xi \right| + C_1 h \frac{1}{|x|}.$$

Mittels partieller Integration bezüglich  $\xi_1$ , der Taylorentwicklung für den Ausdruck  $\frac{2\xi_1}{|\xi|^4} - \frac{2h^{-1} \sin(h\xi_1)}{d^4}$  und der Ungleichung  $d^2 \geq \frac{4}{\pi^2} |\xi|^2$  beweist man

$$\begin{aligned} I_4 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{|\xi| \leq \varepsilon} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) e^{-ix\xi} d\xi + \int_{\varepsilon < |\xi| < 1} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) e^{-ix\xi} d\xi \right| \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( C_2 h^2 \int_{|\xi| \leq \varepsilon} d\xi + \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \frac{1}{ix_1} \int_{\varepsilon < |\xi| < 1} \left( \frac{2\xi_1}{|\xi|^4} - \frac{2h^{-1} \sin(h\xi_1)}{d^4} \right) e^{-ix\xi} d\xi \right| \right) \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \left( \int_{|\xi| = \varepsilon} + \int_{|\xi| = 1} \right) \left( -\frac{1}{ix_1} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) e^{-ix\xi} \cos(\vec{n}, \xi_1) \right) ds \right| \\ &\leq C_3 \frac{1}{|x_1|} h^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\varepsilon < |\xi| < 1} \frac{1}{|\xi|} d\xi + \int_{|\xi| = \varepsilon} ds + \int_{|\xi| = 1} ds \right) \leq C_4 h^2 \frac{1}{|x_1|}. \end{aligned}$$

Völlig analog kann durch die partielle Integration bezüglich  $\xi_2$  die Abschätzung  $I_4 \leq C h^2 |x_2|^{-1}$  gezeigt werden. Aus der Ungleichung  $(|x_1| I_4)^2 + (|x_2| I_4)^2 \leq C^2 h^4$  folgt schließlich  $I_4 \leq C h^2 |x|^{-1}$  ■

**Satz 1.3:** Für  $h \leq e^{-1}$  und  $2 < p < \infty$  gilt  $\|E_h^2(x) - E(x)\|_{l_p(\mathbb{R}_h^2 \setminus (0,0))} \leq C h^{2/p}$ .

**Beweis:** In Analogie zum Beweis von Satz 1.2 erhält man unter Verwendung von Lemma 1.2 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|E_h^2(x) - E(x)\|_{l_p(\mathbb{R}_h^2 \setminus (0,0))} &\leq C_1 \left\| \frac{h}{|x|} \right\|_{l_p(\mathbb{R}_h^2 \setminus (0,0))} \\ &\leq C_2 \left( h^2 + \int_{u=h}^{\infty} \left( \frac{h}{u} \right)^p h du + \int_{\varrho=h}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left( \frac{h}{\varrho} \right)^p \varrho d\varphi d\varrho \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Dabei sichert die Bedingung  $2 < p < \infty$  die Existenz des Integrals  $\int_{\varrho=h}^{\infty} \left( \frac{h}{\varrho} \right)^p \varrho d\varrho$ . Die Behauptung des Satzes folgt aus der Berechnung der Integrale in (1.9) ■

Der Satz 1.3 und die Differenz

$$E_h^2(x) - E_h(x) = E_h^1(x) + K_2 - E_h(x) = K_1 + K_2 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{5}{2} \ln 2 - \ln h \right) \quad (1.10)$$

zeigen, daß gerade die in der Literatur zitierte Fundamentallösung (1.2) nicht gegen die kontinuierliche Fundamentallösung (1.3) konvergiert. Während der Ausdruck  $K_1 + K_2$  explizit berechnet werden kann, liegen für die einzelnen Konstanten nur Näherungswerte vor. Insbesondere ist  $K_2 \approx 0.005 h^2$ . Mittels Taylorentwicklung erhält man die Schranken  $0.005 h^2 < K_2 < 0.0164 h^2$ . Aus diesen Überlegungen und der Beziehung (1.10) resultiert schließlich eine Abschätzung für die Konstante  $K_1$ .

Die Beweisidee von Lemma 1.1 und 1.2 läßt sich unmittelbar auf die Abschätzung der diskreten Fundamentallösung eines beliebigen elliptischen Operators zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten übertragen. Es seien  $a_{jk} = a_{kj}$  die von  $h$  und  $x$  unabhängigen Konstanten des Differenzenoperators  $P_h u_h(x) = - \sum_{j,k=1}^2 a_{jk} D_j D_{-k} u_h(x)$ , die für  $C > 0$  und  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2)$  die Elliptizitätsbedingung  $\sum_{j,k=1}^2 a_{jk} \kappa_j \kappa_k \geq C |\kappa|^2$  erfüllen. Ausgehend von den Eigenschaften 10 und 11 der diskreten Fouriertransformation erhält man in Analogie zu (1.4) die Fundamentallösung

$$\begin{aligned} E_h^1(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int_{|\xi| < 1} \left( \sum_{j,k=1}^2 a_{jk} \eta_{-j} \eta_k \right)^{-1} (e^{-ix\xi} - 1) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{|\xi| > 1, \xi \in Q_h} \left( \sum_{j,k=1}^2 a_{jk} \eta_{-j} \eta_k \right)^{-1} e^{-ix\xi} d\xi \right) \end{aligned}$$

mit  $\eta_{-j} = h^{-1} (1 - e^{-ih\xi_j})$  und  $\eta_k = h^{-1} (1 - e^{ih\xi_k})$ . Dabei gilt insbesondere

$$\sum_{j,k=1}^2 a_{jk} \eta_{-j} \eta_k = \sum_{j,k=1}^2 a_{jk} \left( 2h^{-1} \sin \left( \frac{h\xi_j}{2} \right) \right) \left( 2h^{-1} \sin \left( \frac{h\xi_k}{2} \right) \right) \left( \cos \left( \frac{h(\xi_j - \xi_k)}{2} \right) \right).$$

Mit der Beweistechnik von Lemma 1.1 und Satz 1.2 kann man zeigen, daß die diskrete Fundamentallösung  $E_h^1(x)$  gegen die Fundamentallösung

$$E(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int_{|\xi|<1} \left( \sum_{j,k=1}^2 a_{jk} \xi_j \xi_k \right)^{-1} (e^{-ix\xi} - 1) d\xi + \int_{|\xi|>1} \left( \sum_{j,k=1}^2 a_{jk} \xi_j \xi_k \right)^{-1} e^{-ix\xi} d\xi \right)$$

des elliptischen Operators  $Pu(x) = - \sum_{j,k=1}^2 a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} u(x)$  konvergiert. Bei dem zu Lemma 1.1 analogen Beweis wird sowohl die Beziehung  $d^2 \geq \frac{4}{\pi^2} |\xi|^2$  als auch die Elliptizitätsbedingung benutzt. Der Beweis von Satz 1.2 kann übertragen werden. Die den Aussagen in Lemma 1.2 und Satz 1.3 entsprechenden Resultate erhält man unter Verwendung der diskreten Fundamentallösung  $E_h^2(x) = E_h^1(x) + K_3$  mit der von  $h$  abhängigen Konstante

$$K_3 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|\xi|<1} \left[ \left( \sum_{j,k=1}^2 a_{jk} \eta_{-j} \eta_k \right)^{-1} - \left( \sum_{j,k=1}^2 a_{jk} \xi_j \xi_k \right)^{-1} \right] d\xi.$$

Werden nur Gitterpunkte aus einem beschränkten Gebiet betrachtet, dann kann man für jede feste Schrittweite  $h < 1$  obere Schranken für die diskreten Fundamentallösungen  $E_h(x)$ ,  $E_h^1(x)$  und  $E_h^2(x)$  des Laplaceoperators angeben.

**Lemma 1.3:** *Es sei  $C_B < \infty$  eine beliebig gewählte, von  $h$  unabhängige Konstante. In allen Gitterpunkten  $x$ , die der Bedingung  $|x| < C_B$  genügen, sind die diskreten Fundamentallösungen  $E_h(x)$ ,  $E_h^1(x)$  und  $E_h^2(x)$  beschränkt, wobei die obere Schranke im wesentlichen von  $\ln|h|$  abhängt.*

**Beweis:** Vorausgesetzt wird, daß  $h < 1$  eine fest gewählte Schrittweite ist und nur Gitterpunkte betrachtet werden, die der Bedingung  $|x| < C_B$  genügen. Für die diskrete Fundamentallösung  $E_h(x)$  gilt im Koordinatenursprung  $E_h(0,0) = 0$ . In allen weiteren Gitterpunkten erhält man mit Hilfe von Lemma 1.2, der Darstellung der Fundamentallösung (1.3) und der Beziehung (1.10) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |E_h(x)| &\leq |E_h(x) - E_h^2(x)| + |E_h^2(x) - E(x)| + |E(x)| \\ &\leq C_1 + C_2 |\ln h| + C_3 \frac{h}{|x|} + C_4 |\ln |x|| \end{aligned}$$

Eine obere Schranke für die diskrete Fundamentallösung  $E_h^1(x)$  in den Gitterpunkten außerhalb des Koordinatenursprungs kann man unter Verwendung von Lemma 1.1 angeben. Im einzelnen gilt

$$\begin{aligned} |E_h^1(x)| &\leq |E_h^1(x) - E(x)| + |E(x)| \\ &\leq C_1 h^2 + C_2 \frac{h}{|x|} + C_3 + C_4 |\ln |x||. \end{aligned}$$

Andererseits erhält man mit Hilfe der Ungleichung  $d^2 \geq \frac{4}{\pi^2} |\xi|^2$  im Koordinatenursprung die Abschätzung

$$\begin{aligned} |E_h^1(0,0)| &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|\xi|>1, \xi \in Q_h} \frac{1}{d^2} d\xi \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\pi^2}{4} \int_{\varrho=1}^{\sqrt{2}\pi/h} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{\varrho^2} \varrho d\varphi d\varrho \leq C_6 |\ln h|. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.2 kann die diskrete Fundamentallösung  $E_h^2(x)$  außerhalb des Gitterpunktes  $(0,0)$  durch

$$\begin{aligned} |E_h^2(x)| &\leq |E_h^2(x) - E(x)| + |E(x)| \\ &\leq C_1 \frac{h}{|x|} + C_2 + C_3 |\ln |x|| \end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Im Koordinatenursprung gilt auf Grund der Beziehung (1.10)

$$|E_h^2(0,0)| \leq C_1 + C_2 |\ln h| \quad \blacksquare$$

**Bemerkung 1.1:** In Lemma 1.3 muß  $x$  nicht unbedingt ein Gitterpunkt sein. Die angegebenen Abschätzungen gelten in allen Punkten  $x$  mit  $|x| < C_B < \infty$ , wenn bei der Berechnung der Fundamentallösungen der Einschränkungoperator  $R_h$  der Rücktransformation  $F_h^{-1} = R_h F$  weggelassen wird. Auf diese Weise ist eine ganz natürliche Fortsetzung der diskreten Fundamentallösung möglich.

Auf der Grundlage dieser Fortsetzung soll das Konvergenzverhalten der ersten Ableitung der diskreten Fundamentallösung des Laplaceoperators untersucht werden. Für die Fortsetzung der diskreten Fundamentallösung wird kein neues Symbol eingeführt, da aus dem Zusammenhang hervorgeht, worauf sich die Bezeichnung genau bezieht.

**Lemma 1.4:** Die auf  $\mathbb{R}^2$  fortgesetzten Fundamentallösungen  $E_h(x)$ ,  $E_h^1(x)$  und  $E_h^2(x)$  besitzen im Punkt  $x$  stetige erste partielle Ableitungen nach  $x_1$  und  $x_2$ .

**Beweis:** Betrachtet wird zunächst die Fundamentallösung (1.2). Durch die formale Differentiation nach  $x_1$  unter dem Integralzeichen erhält man das Integral

$$I_1 = \int_{\xi \in Q_h} \frac{(-i\xi_1)e^{-ix\xi}}{d^2} d\xi.$$

Dieses Integral konvergiert für jede feste Schrittweite  $h$  gleichmäßig, da

$$\left| \frac{-i\xi_1 e^{-ix\xi}}{d^2} \right| \leq \frac{|\xi_1|}{d^2} \leq C_1 \frac{1}{|\xi|} \quad \text{gilt.}$$

Indem das schwach singuläre Integral in der Form

$$I_1 = \int_{\xi \in Q_h} \frac{A(x, \xi)}{|\xi|^{3/2}} d\xi \quad \text{mit dem stetigen Anteil} \quad A(x, \xi) = \frac{(-i\xi_1)e^{-ix\xi}|\xi|^{3/2}}{d^2}$$

geschrieben wird, kann man beweisen, daß  $I_1$  eine stetige Funktion von  $x$  ist. Nach dem Satz über die Differentiation von Parameterintegralen existiert die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_1} E_h(x)$  im Punkt  $x$  und stimmt mit dem Integral  $I_1$  überein. Der Beweis für die partielle Ableitung nach  $x_2$  sowie für die Fundamentallösungen  $E_h^1(x)$  und  $E_h^2(x)$  kann völlig analog geführt werden ■

Um das Konvergenzverhalten der ersten partiellen Ableitung der in den Raum  $\mathbb{R}^2$  fortgesetzten diskreten Fundamentallösung beurteilen zu können, wird auch die partielle Ableitung der Fundamentallösung (1.3) nach  $x_1$  berechnet. In Analogie zu Lemma 1.4 erhält man für das erste Teilintegral

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{|\xi| < 1} \frac{e^{-ix\xi} - 1}{|\xi|^2} d\xi = \int_{|\xi| < 1} \frac{(-i\xi_1)e^{-ix\xi}}{|\xi|^2} d\xi.$$

Für die partielle Ableitung des noch zu betrachtenden Integrals gilt im Raum  $S'$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{|\xi| > 1} \frac{e^{-ix\xi}}{|\xi|^2} d\xi = \int_{|\xi| > 1} \frac{(-i\xi_1)e^{-ix\xi}}{|\xi|^2} d\xi.$$

Ausgangspunkt des folgenden Lemmas ist die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} (E_h^*(x) - E(x)) \right| \leq \left| \int_{\xi \in Q_h} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{|\xi|^2} \right) (-i\xi_1) e^{-ix\xi} d\xi \right| + \left| \int_{\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_h} \frac{(-i\xi_1)e^{-ix\xi}}{|\xi|^2} d\xi \right|,$$

wobei  $E_h^*(x)$  eine der Fundamentallösungen  $E_h(x)$ ,  $E_h^1(x)$  beziehungsweise  $E_h^2(x)$  ist.

**Lemma 1.5:** Für  $h < 1$  gilt  $\left| \frac{\partial}{\partial x_1} (E_h^*(x) - E(x)) \right| \leq \frac{Ch}{|x|^2}$ .

Der Beweis unterscheidet sich von der Vorgehensweise in Lemma 1.1 und 1.2 nur durch die zweifache partielle Integration. Bei der partiellen Ableitung der Fundamentallösungen nach  $x_2$  ergeben sich völlig analoge Abschätzungen.

Die im weiteren angegebenen Eigenschaften bilden die Grundlage für die Beweise im Kapitel 3 dieser Arbeit. Dabei wird generell vorausgesetzt, daß  $h \leq e^{-1}$  gilt.

**Lemma 1.6:** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet,  $G_h = G \cap \mathbb{R}_h^2$  und  $W(mh)$  das Quadrat mit dem Mittelpunkt  $mh = (m_1h, m_2h) \in G_h$  und der Seitenlänge  $h$ . Für ganzzahliges  $p < \infty$  erhält man die  $L_p$ -Abschätzung

$$\left( \int_{W(mh)} |E(mh - \xi)|^p d\xi \right)^{1/p} \leq C h^{2/p} |\ln h|.$$

Die Konstante  $C$  ist von  $h$  unabhängig.

**Beweis:** Nach Formel (1.3) gilt

$$\begin{aligned}
I &= \left( \int_{W(mh)} |E(mh - \xi)|^p d\xi \right)^{1/p} \\
&= \left( \int_{\xi_1=m_1h-\frac{h}{2}}^{m_1h+\frac{h}{2}} \int_{\xi_2=m_2h-\frac{h}{2}}^{m_2h+\frac{h}{2}} \left| -\frac{1}{2\pi} \left( \mathbf{C} - \ln 2 + \ln \sqrt{(m_1h - \xi_1)^2 + (m_2h - \xi_2)^2} \right) \right|^p d\xi_1 d\xi_2 \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Aus der Substitution  $x = \xi_1 - m_1h$  und  $y = \xi_2 - m_2h$  und der Minkowskischen Ungleichung ergibt sich für ganzzahliges  $p < \infty$  und  $h \leq e^{-1}$

$$\begin{aligned}
I &\leq C_1 h^{2/p} + C_2 \left( \int_{x=-h/2}^{h/2} \int_{y=-h/2}^{h/2} |\ln \sqrt{x^2 + y^2}|^p dx dy \right)^{1/p} \\
&\leq C_1 h^{2/p} + C_2 \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varrho=\varepsilon}^{\sqrt{2}h/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\ln \varrho|^p \varrho d\varphi d\varrho \right)^{1/p} \leq C_1 h^{2/p} + C_3 \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varrho=\varepsilon}^{\sqrt{2}h/2} \left( \ln \frac{1}{\varrho} \right)^p \varrho d\varrho \right)^{1/p} \\
&= C_1 h^{2/p} + C_3 \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\varrho^2}{p+1} \sum_{k=0}^p (p+1)p \dots (p-k+1) \frac{(-\ln \varrho)^{p-k}}{2^{k+1}} \right) \Big|_{\varrho=\varepsilon}^{\sqrt{2}h/2} \right)^{1/p} \\
&\leq C_4 h^{2/p} + C_5 h^{2/p} |\ln h| \leq C_6 h^{2/p} |\ln h| \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Eine Abschätzung der  $L_p$ -Norm für nicht ganzzahliges  $p$  resultiert aus der Einbettung der  $L_p$ -Räume.

Das folgende Lemma beschreibt das Konvergenzverhalten der diskreten Fundamentallösung auf  $\Gamma_h = \{rh = (r_1h, r_2h) \in \mathbb{R}_h^2 \setminus G_h : |rh - mh| \leq \sqrt{2}h, mh \in G_h\}$ . Dabei sei  $\Gamma^D$  sei der Rand, der durch die achsenparallele Verbindung aller Punkte aus  $\Gamma_h$  entsteht. Vorausgesetzt wird, daß sich der Rand  $\Gamma^D$  bei der Verfeinerung der Schrittweite  $h$  nicht verändert, so daß ab einer Schrittweite  $h_o \leq e^{-1}$  für zwei beliebige Punkte  $kh$  und  $jh \in \Gamma_h$  mit  $h \leq h_o$  und  $k \neq j$  die Ungleichung  $|kh - jh| \geq h$  gültig ist.

**Lemma 1.7:** Die Bedingung  $h \leq h_o \leq e^{-1}$  sei erfüllt. Ist  $lh = (l_1h, l_2h) \in \Gamma_h$  ein beliebiger Randpunkt und  $\Gamma_h^* = \{rh \in \Gamma_h : r \neq l\}$ , dann gilt für die Differenz zwischen der diskreten und der kontinuierlichen Fundamentallösung

$$\|E_h^2(lh - rh) - E(lh - rh)\|_{l_p(\Gamma_h^*)} \leq \begin{cases} Ch |\ln h| & p = 1 \\ Ch^{1/p} & p > 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

**Beweis:** Aus Lemma 1.2 folgt

$$\|E_h^2(lh - rh) - E(lh - rh)\|_{l_p(\Gamma_h^*)} \leq \left( \sum_{rh \in \Gamma_h, r \neq l} \left( C \frac{h}{|lh - rh|} \right)^p h \right)^{1/p}.$$

Zerlegt man den diskreten Rand  $\Gamma_h$  in die Teilränder  $\Gamma_h^a = \{rh \in \Gamma_h : |lh - rh| \geq h_o\}$  und  $\Gamma_h^b = \{rh \in \Gamma_h : |lh - rh| < h_o\}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{rh \in \Gamma_h, r \neq l} \left( C \frac{h}{|lh - rh|} \right)^p h &= \sum_{rh \in \Gamma_h^a} \left( C \frac{h}{|lh - rh|} \right)^p h + \sum_{rh \in \Gamma_h^b, r \neq l} \left( C \frac{h}{|lh - rh|} \right)^p h \\ &\leq \sum_{rh \in \Gamma_h^a} \left( C \frac{h}{h_o} \right)^p h + C_1 \sum_{s=1}^{[h_o/h]} \left( C \frac{h}{sh} \right)^p h \leq C_2 h^p + C_3 \sum_{s=1}^{[h_o/h]} s^{-p} h. \end{aligned}$$

Dabei symbolisiert  $[h_o/h]$  den ganzen Teil der Zahl  $h_o/h$ . Liegen alle Gitterpunkte  $rh \in \Gamma_h^b$  auf einer Geraden, dann kann die Konstante  $C_1$  durch 2 ersetzt werden. Die Konstante  $C_2$  hängt im wesentlichen von  $h_o$  und der Bogenlänge des Randes  $\Gamma^D$  ab. Für  $[h_o/h] = 1$  ist das Lemma offensichtlich bewiesen. Im Fall  $[h_o/h] > 1$  gilt

$$C_3 \sum_{s=1}^{[h_o/h]} s^{-p} h = C_3 h + C_3 \sum_{s=2}^{[h_o/h]} s^{-p} h \leq C_3 h + C_3 \int_{u=h}^{h_o} \left( \frac{h}{u} \right)^p du.$$

Aus der Berechnung dieses Integrals resultiert die Beziehung (1.11) ■

Der Schnitt von  $\Gamma^D$  und dem Quadrat mit dem Mittelpunkt  $lh = (l_1 h, l_2 h) \in \Gamma_h$  und der Seitenlänge  $h$  wird mit  $U(lh)$  bezeichnet.  $U(lh)$  besteht aus zwei achsenparallelen Geradenstücken  $U_i(lh)$ ,  $i = 1, 2$  der Länge  $h/2$ . Ist  $y = (y_1, y_2) \in U(lh)$  ein beliebiger Randpunkt, dann ist für alle  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in U_i(lh)$  eine der Differenzen  $|y_1 - \xi_1|$  oder  $|y_2 - \xi_2|$  konstant, wobei die Konstante  $K_o$  die Ungleichung  $K_o \leq h/2$  erfüllt.

**Lemma 1.8:** Für ganzzahliges  $p < \infty$ ,  $lh \in \Gamma_h$  und  $y \in U(lh)$  gilt

$$\left( \int_{U(lh)} |E(y - \xi)|^p d\xi \right)^{1/p} \leq C h^{1/p} |\ln h|.$$

Die Konstante  $C$  ist von  $h$  unabhängig.

**Beweis:** Mit Hilfe der Substitution  $u = |y_1 - \xi_1|$  und  $K_o = |y_2 - \xi_2|$  bzw.  $u = |y_2 - \xi_2|$  und  $K_o = |y_1 - \xi_1|$  erhält man in Analogie zum Beweis von Lemma 1.6 auf jedem Geradenstück  $U_i(lh)$ ,  $i = 1, 2$  bei der entsprechenden Wahl von  $j$  aus der Menge  $\{1, 2\}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} I &= \left( \int_{U_i(lh)} |E(y - \xi)|^p d\xi \right)^{1/p} \leq C_1 h^{1/p} + C_2 \left( \int_{U_i(lh)} |\ln \sqrt{K_o^2 + (y_j - \xi_j)^2}|^p d\xi \right)^{1/p} \\ &\leq C_1 h^{1/p} + C_3 \left( \int_{u=0}^h \left( \ln \frac{1}{\sqrt{K_o^2 + u^2}} \right)^p du \right)^{1/p} \leq C_1 h^{1/p} + C_3 \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{u=\varepsilon}^h \left( \ln \frac{1}{u} \right)^p du \right)^{1/p} \\ &\leq C_1 h^{1/p} + C_3 \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{u}{p+1} \sum_{k=0}^p (p+1)p \dots (p-k+1) (-\ln u)^{p-k} \right) \Big|_{u=\varepsilon}^h \right)^{1/p} \\ &\leq C_1 h^{1/p} + C_4 h^{1/p} |\ln h| \leq C_5 h^{1/p} |\ln h| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.2:** Im Fall  $y = lh$  gilt  $K_o = 0$  und bei der Integration über  $u$  kann als obere Grenze  $h/2$  gewählt werden. Die in Lemma 1.8 bewiesene Ungleichung ist auch dann gültig, wenn  $y$  ein innerer Punkt ist, der in der Nähe des Randes liegt. Betrachtet man beispielsweise die Randpunkte  $lh \in \Gamma_h$  für die  $|y - lh| < \sqrt{2}h$  gilt, dann sind für alle  $\xi \in U_i(lh)$  die Beziehungen  $|y_1 - \xi_1| = K_o < \sqrt{2}h$  und  $|y_2 - \xi_2| < \sqrt{2}h + \frac{h}{2}$  bzw.  $|y_1 - \xi_1| < \sqrt{2}h + \frac{h}{2}$  und  $|y_2 - \xi_2| = K_o < \sqrt{2}h$  erfüllt.

Im folgenden sei  $K = \{(0, 0); (1, 0); (-1, 0); (0, 1); (0, -1)\}$  und  $rh \in \Gamma_h$  ein fest gewählter Randpunkt. Die Menge  $\{rh + kh : k \in K\}$  heißt 5-Punkte-Stern-Umgebung von  $rh$ . Jeweils drei Punkte dieser Umgebung gehören zur Menge  $\Gamma_h$ . Sind die übrigen zwei Punkte aus  $G_h$ , dann besitzt das betrachtete Gebiet im Punkt  $rh$  eine Innenecke. Gehören beide Punkte zur Menge  $\mathbb{R}_h^2 \setminus (G_h \cup \Gamma_h)$ , dann bezeichnet man den Gitterpunkt  $rh \in \Gamma_h$  als Außenecke.

**Lemma 1.9:** Ändert sich der bei der achsenparallelen Verbindung aller Randgitterpunkte entstehende Rand  $\Gamma^D$  bei der Verfeinerung der Schrittweite nicht, dann erhält man in jedem fest gewählten inneren Gitterpunkt  $mh$  aus dem beschränkten Gebiet  $G_h$  die  $l_p$ -Abschätzung

$$\|E_h^2(mh - rh) - E(mh - rh)\|_{l_p(\Gamma_h)} \leq \begin{cases} C h |\ln h| & p = 1 \\ C h^{1/p} & p > 1. \end{cases}$$

**Beweis:** Es sei  $h_o \leq \epsilon^{-1}$  eine beliebige Schrittweite. Für alle  $h \leq h_o$  wird die Menge der Punkte  $rh \in \Gamma_h$  unterteilt in  $\Gamma_h^a = \{rh \in \Gamma_h : |mh - rh| \geq h_o \ \forall mh \in G_h\}$  und  $\Gamma_h^b = \{rh \in \Gamma_h : |mh - rh| < h_o \ \forall mh \in G_h\}$ . Nach dem Beweis von Lemma 1.7 gilt

$$\|E_h^2(mh - rh) - E(mh - rh)\|_{l_p(\Gamma_h)}^p \leq \sum_{rh \in \Gamma_h} \left( \frac{C h}{|mh - rh|} \right)^p h \leq C_1 h^p + \sum_{rh \in \Gamma_h^b} \left( \frac{C h}{|mh - rh|} \right)^p h,$$

wobei die Konstante  $C_1$  hauptsächlich von  $h_o$  und der Bogenlänge von  $\Gamma^D$  abhängt. Weiterhin sei  $K_{h_o}(mh)$  der Kreis mit dem Mittelpunkt  $mh$  und dem Radius  $h_o$ . Zur Abschätzung der Summe

$$S = \sum_{rh \in \Gamma_h^b} \left( \frac{C h}{|mh - rh|} \right)^p h$$

werden drei Fälle unterschieden:

**1.** Das Innere des Kreises  $K_{h_o}(mh)$  überdeckt nur ein Geradenstück von  $\Gamma^D$ :

Es sei  $d = \alpha h$  mit  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \geq 1$  der minimale Abstand des Gitterpunktes  $mh$  zu den Randpunkten von  $\Gamma_h^b$  und  $\beta^*$  das Maximum der Punkte  $\beta \in \mathbb{N} : (\alpha h)^2 + (\beta h)^2 \leq h_o^2$ . In Analogie zum Beweis von Lemma 1.7 erhält man die Abschätzung

$$S \leq \left( \frac{C}{\alpha} \right)^p h + 2 \sum_{s=1}^{\beta^*} \left( \frac{C}{\sqrt{\alpha^2 + s^2}} \right)^p h \leq C^p h + 2 C^p \sum_{s=1}^{[h_o/h]} s^{-p} h \leq \begin{cases} C_2 h |\ln h| & p = 1 \\ C_3 h & p > 1. \end{cases}$$



2. Das Innere des Kreises  $K_{h_o}(mh)$  überdeckt zwei Geradenstücke von  $\Gamma^D$ , die in einer Außenecke zusammenstoßen:

Die Menge der Randpunkte von  $\Gamma_h^b$  wird durch die beiden Geradenstücke in zwei Teilmengen unterteilt. Dadurch erhält man eine spezielle Zerlegung der Summe  $S$ , wobei jeder einzelne Summand wie im ersten Fall abgeschätzt werden kann.

3. Das Innere des Kreises  $K_{h_o}(mh)$  überdeckt zwei Geradenstücke von  $\Gamma^D$ , die in einer Innenecke zusammenstoßen:

Liegt der Punkt  $mh$  auf der Verlängerung von einem der Geradenstücke, dann gilt

$$\begin{aligned} S &\leq \left(\frac{C}{\alpha}\right)^p h + \sum_{s=1}^{\beta^*} \left(\frac{C}{\sqrt{\alpha^2 + s^2}}\right)^p h + \sum_{s=1}^{[h_o/h]^{-\alpha}} \left(\frac{C}{\alpha + s}\right)^p h \\ &\leq C^p h + 2C^p \sum_{s=1}^{[h_o/h]} s^{-p} h \leq \begin{cases} C_2 h |\ln h| & p = 1 \\ C_3 h & p > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Liegt der Punkt  $mh$  nicht auf der Verlängerung dieser Geradenstücke, dann bezeichnet man mit  $d_1$  beziehungsweise  $d_2$  den minimalen Abstand des Punktes  $mh$  zu den Geraden, die jeweils eines der beiden Geradenstücke enthalten. Für die entsprechende  $l_p$ -Abschätzung nutzt man die Analogie zum Fall 2 ■

## Die Fundamentallösung der Helmholtzgleichung

Untersucht wird die Differenzengleichung

$$-(\Delta_h^\alpha + \kappa^2) E_h(x) = -(D_{-1}D_1 + D_{-2}D_2 - \alpha h^2 D_{-1}D_1 D_{-2}D_2 + \kappa^2) E_h(x) = \delta_h(x)$$

für  $x = (l_1 h, l_2 h) \in \mathbb{R}_h^2$ . Bereits im Jahre 1949/50 konnte STÖHR [Stoe] eine Lösung dieser Gleichung für den Fall  $\alpha = 0$  angeben. Er charakterisierte das asymptotische Verhalten der Fundamentallösung und fand Rekursionsformeln zur Berechnung von  $E_h(x)$  in speziellen Gitterpunkten. ANDREEV und KRYAKVINA [AK] bewiesen, daß die Bedingung  $\alpha > -1/2$  notwendig und hinreichend für die Elliptizität des Differenzenoperators  $\Delta_h^\alpha$  ist. Die Aktualität des Problems unterstreicht ZEMLA, indem er in seiner Arbeit [Zem] aus dem Jahre 1995 die Existenz und Eindeutigkeit sowie das asymptotische Verhalten der Fundamentallösung  $E_h(x)$  für beliebiges  $\kappa$  und  $\alpha > -1/2$  untersucht.

Mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation erhält man im Fall  $\alpha = 0$  die Fundamentallösung

$$E_h(l_1 h, l_2 h) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{e^{-i(l_1 h \xi_1 + l_2 h \xi_2)}}{d^2 - \kappa^2} d\xi_1 d\xi_2.$$

Während man die diskrete Fundamentallösung des Laplaceoperators in den Gitterpunkten auf der Hauptdiagonale aus endlich vielen Summanden berechnen kann, gelingt es bei der Fundamentallösung der Helmholtzgleichung nicht, entsprechende Rekursionsformeln anzugeben. Lediglich die Integration bezüglich einer Variablen ist exakt ausführbar. Wie man dabei vorgehen kann, soll für  $h = 1$  und  $\kappa^2 > 8$  in den Gitterpunkten  $(2n, 2n)$  mit  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  gezeigt werden.

Ausgangspunkt ist das Doppelintegral

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(2n\xi_1 + 2n\xi_2)}}{4(\sin^2 \frac{\xi_1}{2} + \sin^2 \frac{\xi_2}{2}) - \kappa^2} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(2n\xi_1) \cos(2n\xi_2)}{4 - 2\cos \xi_1 - 2\cos \xi_2 - \kappa^2} d\xi_1 d\xi_2.$$

Das innere Integral kann man berechnen, indem man zur Abkürzung die Schreibweise  $a = 4 - 2\cos \xi_2 - \kappa^2$  und  $b = -2$  einführt und für  $\cos(2n\xi_1)$  die Darstellung

$$\cos(2n\xi_1) = 1 - \frac{4n^2}{2!} \sin^2 \xi_1 + \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)}{4!} \sin^4 \xi_1 - \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)(4n^2 - 4^2)}{6!} \sin^6 \xi_1 + \dots$$

benutzt. Nach GRADSTEIN / RYSHIK gilt

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1=0}^{\pi} \frac{1}{a + b \cos \xi_1} d\xi_1 &= -\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \\ \int_{\xi_1=0}^{\pi} \frac{\sin^2 \xi_1}{a + b \cos \xi_1} d\xi_1 &= \frac{\pi a}{b^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) \end{aligned}$$

und für  $m = 2k + 2$  und  $k \geq 1$  erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1=0}^{\pi} \frac{\sin^m \xi_1}{a + b \cos \xi_1} d\xi_1 &= 2^{m-2} \frac{a}{b^2} \sum_{\nu=1}^k \left( \frac{a^2 - b^2}{-4b^2} \right)^{\nu-1} B\left(\frac{m+1-2\nu}{2}, \frac{m+1-2\nu}{2}\right) \\ &\quad + \left( \frac{a^2 - b^2}{-b^2} \right)^k A \end{aligned}$$

$$\text{mit } A = \frac{\pi a}{b^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$$

$$\text{und der Beta-Funktion } B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \varphi \cos^{2y-1} \varphi d\varphi.$$

Da die entstehenden Ausdrücke nicht geschlossen integrierbar sind, sollte für die Integration bezüglich  $\xi_2$  ein Näherungsverfahren gewählt werden, das hinreichend genaue Werte liefert.

## Die Fundamentallösung der biharmonischen Gleichung

Die Gleichung

$$\Delta_h \Delta_h E_h(x) = \delta_h(x) \quad \text{mit } x = (x_1, x_2) = (l_1 h, l_2 h) \in \mathbb{R}_h^2$$

besitzt auf Grund der Ordnung des Differenzenoperators keine eindeutige Lösung. Eine der Fundamentallösungen hat die Gestalt

$$E_h(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\xi \in Q_h} \frac{e^{-ix\xi} - 1 + 2^{-1}(x\xi)^2}{d^4} d\xi$$

mit  $x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2$ . Bei dieser Darstellung wird das ursprünglich mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation erzielte Integral nach der Methode von THOMÉE regularisiert, indem vom Ausdruck  $e^{-iu}$  mit  $u = x_1\xi_1 + x_2\xi_2$  die ersten Glieder der Taylorreihe subtrahiert werden. Auf Grund der Struktur der diskreten Fundamentallösung können dabei alle Glieder ungerader Ordnung weggelassen werden. Neben dieser Art der Regularisierung des Fourierintegrals erhält man auch durch

$$E_h^s(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\xi \in Q_h} \frac{e^{-ix\xi} - 1 + 2^{-1}(A(x, \xi))^2}{d^4} d\xi$$

mit  $A(x, \xi) = x_1 \sin(\xi_1) + x_2 \sin(\xi_2)$  eine Fundamentallösung der diskreten biharmonischen Gleichung. Eine praktische Möglichkeit zur Berechnung von  $E_h^s(x)$  für die Gitterpunkte auf der Hauptdiagonale wird in der Arbeit von GÜRLEBECK und SPRÖSSIG [GS2] angegeben.

In Analogie zum Beweis von Lemma 1.1 untersuchte KÄHLER [Kae] die Differenz zwischen den Fundamentallösungen

$$E(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int_{|\xi| < 1} \frac{e^{-ix\xi} - 1 - 2^{-1}(x\xi)^2}{|\xi|^4} d\xi + \int_{|\xi| > 1} \frac{e^{-ix\xi}}{|\xi|^4} d\xi \right)$$

und

$$E_h^1(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int_{|\xi| < 1} \frac{e^{-ix\xi} - 1 - 2^{-1}(x\xi)^2}{d^4} d\xi + \int_{|\xi| > 1, \xi \in Q_h} \frac{e^{-ix\xi}}{d^4} d\xi \right).$$

Aus der Ungleichung

$$|E(x) - E_h^1(x)| \leq C_1 h^2 |x|^2 + C_2 h |x|^{-1} + C_3 h^3$$

erhält er im beschränkten Gebiet  $G_h$  die  $l_p$ -Abschätzung

$$\|E(x) - E_h^1(x)\|_{l_p(G_h)} \leq \begin{cases} C h & 1 \leq p < 2 \\ C h \sqrt{|\ln h|} & p = 2 \\ C h^{2/p} & p > 2. \end{cases}$$

## Fundamentallösungen diskreter Cauchy-Riemann-Operatoren

Approximationen des Cauchy-Riemann-Operators erhält man durch die diskreten Operatoren  $D_h^+$  und  $D_h^-$  mit

$$\begin{aligned} D_h^+ u_h^{k,j} &= \frac{1-i}{2h} (u_h^{k+1,j+1} - u_h^{k,j}) + \frac{1+i}{2h} (u_h^{k,j+1} - u_h^{k+1,j}) \quad \text{und} \\ D_h^- u_h^{k,j} &= \frac{1+i}{2h} (u_h^{k,j} - u_h^{k-1,j-1}) + \frac{1-i}{2h} (u_h^{k-1,j} - u_h^{k,j-1}), \end{aligned}$$

wobei  $i$  die imaginäre Einheit sei und in den Gitterpunkten  $x = (x_1, x_2) = (kh, jh)$   $u_h^{k,j} := u_h(kh, jh)$  gilt. Für  $h \rightarrow 0$  kann man zeigen, daß  $D_h^+$  gegen  $(-i) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$  und  $D_h^-$  gegen  $i \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$  konvergiert. Im folgenden wird die Differenzengleichung

$$D_h^+ E_h^+(kh, jh) = \begin{cases} h^{-2} & k = j = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.12)$$

betrachtet. GÜRLEBECK berechnet die diskrete Fundamentallösung  $E_h^+(kh, jh)$  in der Arbeit [Gue1] mit Hilfe der Beziehung

$$E_h^+(kh, jh) = -D_h^- \tilde{E}_h(kh, jh), \quad (1.13)$$

wobei  $\tilde{E}_h^{k,j} := \tilde{E}_h(kh, jh)$  eine Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} -\tilde{\Delta}_h \tilde{E}_h^{k,j} &= \frac{1}{2h^2} \left( 4\tilde{E}_h^{k,j} - \tilde{E}_h^{k+1,j+1} - \tilde{E}_h^{k+1,j-1} - \tilde{E}_h^{k-1,j+1} - \tilde{E}_h^{k-1,j-1} \right) \\ &= -D_h^+ D_h^- \tilde{E}_h^{k,j} = \begin{cases} h^{-2} & k = j = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.14)$$

ist. Im Fall  $h = 1$  erhält er als Lösung der diskreten Laplacegleichung

$$\tilde{E}_1(k, j) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\xi_1=-\pi}^{\pi} \int_{\xi_2=-\pi}^{\pi} \frac{\cos k\xi_1 \cos j\xi_2 - \frac{1+(-1)^{k+j}}{2} - \frac{1-(-1)^{k+j}}{4}(\cos \xi_1 + \cos \xi_2)}{1 - \cos \xi_1 \cos \xi_2} d\xi_1 d\xi_2$$

und die von ihm angegebene Fundamentallösung  $E_1^+(k, j)$  hat die Gestalt

$$E_1^+(k, j) = E_{11}^+(k, j) + E_{12}^+(k, j) \quad (1.15)$$

mit

$$E_{11}^+(k, j) = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1+i}{2} \int_{\xi_1=-\pi}^{\pi} \int_{\xi_2=-\pi}^{\pi} \frac{\cos k\xi_1 \cos j\xi_2 - \cos(k-1)\xi_1 \cos(j-1)\xi_2}{1 - \cos \xi_1 \cos \xi_2} d\xi_1 d\xi_2$$

und

$$E_{12}^+(k, j) = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1-i}{2} \int_{\xi_1=-\pi}^{\pi} \int_{\xi_2=-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k-1)\xi_1 \cos j\xi_2 - \cos k\xi_1 \cos(j-1)\xi_2}{1 - \cos \xi_1 \cos \xi_2} d\xi_1 d\xi_2.$$

GÜRLEBECK erwähnt, daß die diskrete Fundamentallösung  $E_1^+(k, j)$  mit Hilfe der Formel  $t^{-1}E_{h/t}^+(x_1/t, x_2/t) = E_h^+(x_1, x_2)$  auf verschiedene Gitter umgerechnet werden kann. Darüber hinaus charakterisiert er das Konvergenzverhalten der Fundamentallösung  $E_h^+(kh, jh)$  für  $h \rightarrow 0$  in den Punkten  $((k + 0.5)h, (j + 0.5)h)$ .

Der Laplaceoperator  $\tilde{\Delta}_h$  ist im Unterschied zu dem bisher betrachteten Operator  $\Delta_h$  wesentlich besser zur Beschreibung der funktionentheoretischen Eigenschaften geeignet. Dies belegen auch die Arbeiten von DUFFIN [Du1] und SOBOLEV [So1],[So2]. Interessant ist der Zusammenhang zwischen den Fundamentallösungen der beiden Differenzenoperatoren. Bezeichnet man mit  $E_1(k, j)$  die Fundamentallösung (1.2) der Laplacegleichung, dann erhält man auf dem geraden Gitter  $k + j = 2s$ ,  $s \in \mathbb{Z}$  die Umrechnungsvorschrift

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\xi_1=-\pi}^{\pi} \int_{\xi_2=-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(\frac{k+j}{2}\xi_1 + \frac{j-k}{2}\xi_2)} - 1}{4(\sin^2 \frac{\xi_1}{2} + \sin^2 \frac{\xi_2}{2})} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\xi_1=-\pi}^{\pi} \int_{\xi_2=-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(k\xi_1 + j\xi_2)} - 1}{1 - \cos \xi_1 \cos \xi_2} d\xi_1 d\xi_2.$$

Diese Beziehung kann auch in der Form  $E_1(\frac{k+j}{2}, \frac{j-k}{2}) := \frac{1}{2}E_1^*(k, j)$  geschrieben werden, wobei sich die Lösung  $E_1^*(k, j)$  der Gleichung (1.14) von der von GÜRLEBECK berechneten Fundamentallösung  $\tilde{E}_1(k, j)$  durch den Regularisierungsanteil unterscheidet. Auf dem ungeraden Gitter  $k + j = 2s + 1$ ,  $s \in \mathbb{Z}$  sei  $E_1^*(k, j) = 0$ . Nach Gleichung (1.15) gilt für die Fundamentallösung  $E_1^+(k, j)$

$$\begin{aligned} E_1^+(k, j) &= -\frac{1+i}{2} (E_1^*(k, j) - E_1^*(k-1, j-1)) = E_{11}^+(k, j) \quad \text{für } k+j=2s \quad \text{und} \\ E_1^+(k, j) &= -\frac{1-i}{2} (E_1^*(k-1, j) - E_1^*(k, j-1)) = E_{12}^+(k, j) \quad \text{für } k+j=2s+1. \end{aligned}$$

Da die diskrete Fundamentallösung  $E_1^+(k, j)$  eindeutig bestimmt ist, muß auf dem geraden bzw. ungeraden Gitter jeweils ein Summand aus der Darstellung (1.15) identisch Null sein. Der Beweis soll für den Spezialfall  $k + j = 2s$  geführt werden.

Untersucht wird der Ausdruck  $I_1 = 4 \int_{\xi_1=0}^{\pi} \int_{\xi_2=0}^{\pi} \frac{\cos(k-1)\xi_1 \cos j\xi_2 - \cos k\xi_1 \cos(j-1)\xi_2}{1 - \cos \xi_1 \cos \xi_2} d\xi_1 d\xi_2$ .

Zerlegt man das Integral über  $\xi_2$  an der Stelle  $\xi_2 = \pi - \xi_1$  in zwei Teilintegrale, dann erhält man mit Hilfe der Transformation  $v = \pi - \xi_1$  und  $w = \pi - \xi_2$  die Beziehung

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_1=0}^{\pi} \int_{\xi_2=\pi-\xi_1}^{\pi} \frac{\cos(k-1)\xi_1 \cos j\xi_2 - \cos k\xi_1 \cos(j-1)\xi_2}{1 - \cos \xi_1 \cos \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{v=0}^{\pi} \int_{w=0}^{\pi-v} (-1)^{k+j-1} \frac{\cos(k-1)v \cos jw - \cos kv \cos(j-1)w}{1 - \cos v \cos w} dv dw. \end{aligned}$$

Ersetzt man anschließend  $v$  durch  $\xi_1$  und  $w$  durch  $\xi_2$ , dann ergibt sich auf dem geraden Gitter  $I_1 = 0$ .

Indem man zur Berechnung von  $E_1^+(k, j)$  die Fundamentallösung des diskreten Laplaceoperators heranzieht, kann man auch die Möglichkeit der einfachen numerischen Realisierung nutzen.

## 1.2.2 Fundamentallösungen für Gleichungssysteme

### Die Fundamentallösung des Lamé-Systems

In den Gitterpunkten  $x \in \mathbb{R}_h^3$  wird die Lösung  $\vec{E}_h(x) = (E_h^1(x), E_h^2(x), E_h^3(x))$  des Gleichungssystems

$$\mu \Delta_h \vec{E}_h(x) + (\lambda + \mu) \text{grad}_h^+ \text{div}_h^- \vec{E}_h(x) = \vec{S} \quad (1.16)$$

gesucht, wobei die rechte Seite  $\vec{S}$  die drei Vektoren  $(\delta_h(x), 0, 0)$ ,  $(0, \delta_h(x), 0)$  und  $(0, 0, \delta_h(x))$  mit

$$\delta_h(x) = \begin{cases} h^{-3} & \text{für } x = (0, 0, 0) \\ 0 & \text{für } x \neq (0, 0, 0) \end{cases}$$

durchläuft. Dabei sind die Lamé-Koeffizienten  $\lambda$  und  $\mu$  konstant und für die diskreten Operatoren  $\text{div}_h^-$  und  $\text{grad}_h^+$  gilt

$$\begin{aligned} \text{div}_h^- \vec{E}_h(x) &= D_{-1} E_h^1(x) + D_{-2} E_h^2(x) + D_{-3} E_h^3(x) \quad \text{sowie} \\ \text{grad}_h^+ \text{div}_h^- \vec{E}_h(x) &= (D_1 \text{div}_h^- \vec{E}_h(x), D_2 \text{div}_h^- \vec{E}_h(x), D_3 \text{div}_h^- \vec{E}_h(x)). \end{aligned}$$

Im Fall  $\vec{S} = (\delta_h(x), 0, 0)$  kann man das Gleichungssystem (1.16) in der Form

$$A (\vec{E}_h(x))^T = \vec{S}^T \quad \text{mit}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mu \Delta_h + (\lambda + \mu) D_1 D_{-1} & (\lambda + \mu) D_1 D_{-2} & (\lambda + \mu) D_1 D_{-3} \\ (\lambda + \mu) D_2 D_{-1} & \mu \Delta_h + (\lambda + \mu) D_2 D_{-2} & (\lambda + \mu) D_2 D_{-3} \\ (\lambda + \mu) D_3 D_{-1} & (\lambda + \mu) D_3 D_{-2} & \mu \Delta_h + (\lambda + \mu) D_3 D_{-3} \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei mit  $(\vec{E}_h(x))^T$  und  $\vec{S}^T$  die zu  $\vec{E}_h(x)$  bzw.  $\vec{S}$  transponierten Vektoren bezeichnet werden. Unter Verwendung der Eigenschaften 10 - 13 der diskreten Fouriertransformation erhält man für dieses System die Lösung

$$E_h^i(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\eta_{-i}\eta_1}{d^4} - \frac{\delta_{ij}}{\mu d^2} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1$$

mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Analog gilt für  $\vec{S} = (0, \delta_h(x), 0)$

$$E_h^i(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\eta_{-i}\eta_2}{d^4} - \frac{\delta_{ij}}{\mu d^2} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 2$$

und für  $\vec{S} = (0, 0, \delta_h(x))$

$$E_h^i(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\eta_{-i}\eta_3}{d^4} - \frac{\delta_{ij}}{\mu d^2} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 3.$$

Im weiteren soll eine Möglichkeit der Berechnung von  $\vec{E}_h(x)$  vorgestellt werden. Das Prinzip wird am Spezialfall  $\vec{S} = (\delta_h(x), 0, 0)$  erläutert. Es sei  $e_j$  der  $j$ -te Einheitsvektor im Raum  $\mathbb{R}^3$  und

$$rot_h^+ \vec{E}_h(x) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ E_h^1(x) & E_h^2(x) & E_h^3(x) \end{vmatrix}.$$

Durch einfache Umrechnungen kann man beweisen, daß  $\vec{E}_h(x)$  eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} div_h^- \vec{E}_h(x) &= -(2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\lambda + 2\mu} D_{-1} R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right) \\ rot_h^+ \vec{E}_h(x) &= -(2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\mu} rot_h^+ \vec{v} \quad \text{mit } \vec{v} = \left( R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right), 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

ist, wobei die rechte Seite von der diskreten Fundamentallösung  $(2\pi)^{-3/2} R_h F(\frac{1}{d^2})$  des Laplaceoperators abhängt. Wird der Vektor  $\vec{\mathcal{E}}_h(x) = (0, E_h^1(x), E_h^2(x), E_h^3(x))$  als ein Element des Raumes  $\mathbb{R}^4$  mit den Einheitsvektoren  $e_j^*$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$  betrachtet, dann entspricht diesem Vektor nach [GS1] das Quaternion  $\mathcal{E}_h(x) = \sum_{j=1}^3 E_h^j(x) e_j^*$ . Die Gleichung

$$\mathcal{D}_h \mathcal{E}_h(x) := \left( -div_h^- \mathcal{E}_h(x) \right) e_0^* + rot_h^+ \mathcal{E}_h(x) \quad (1.18)$$

ist ein diskretes Analogon der Operatorgleichung

$$\mathcal{D}\mathcal{E}(x) = (-div \mathcal{E}(x)) e_0^* + rot \mathcal{E}(x), \quad \mathcal{E}(x) = \sum_{j=1}^3 \mathcal{E}_j(x) e_j^*,$$

wobei der Operator  $\mathcal{D} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} e_j^*$  als Dirac-Operator bezeichnet wird.

Die Beziehungen (1.17) und (1.18) zeigen, daß  $\vec{E}_h(x)$  die Lösung einer diskreten Dirac-Gleichung mit spezieller rechter Seite ist. Sinnvoll sind die Überlegungen jedoch nur dann, wenn die diskrete Dirac-Gleichung auch gelöst werden kann.

## Fundamentallösung des Systems der elastischen Schwingungsgleichungen

Als Verallgemeinerung des Systems (1.16) wird das Gleichungssystem

$$\mu \Delta_h \vec{E}_h(x) + (\lambda + \mu) grad_h^+ div_h^- \vec{E}_h(x) + \varrho \omega^2 \vec{E}_h(x) = \vec{S}$$

mit den konstanten Koeffizienten  $\lambda, \mu, \varrho$  und  $\omega$  betrachtet. In Analogie zum Lamé-System erhält man im Fall  $\vec{S} = (\delta_h(x), 0, 0)$  die Lösung

$$E_h^i(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{(\lambda + \mu) \eta_{-i} \eta_1}{(\mu d^2 - \varrho \omega^2)((\lambda + 2\mu) d^2 - \varrho \omega^2)} - \frac{\delta_{ij}}{\mu d^2 - \varrho \omega^2} \right) \quad \begin{matrix} j = 1, \\ i = 1, 2, 3. \end{matrix}$$

Analog gilt für  $\vec{S} = (0, \delta_h(x), 0)$

$$E_h^i(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{(\lambda + \mu) \eta_{-i} \eta_2}{(\mu d^2 - \varrho \omega^2)((\lambda + 2\mu)d^2 - \varrho \omega^2)} - \frac{\delta_{ij}}{\mu d^2 - \varrho \omega^2} \right) \quad \begin{matrix} j = 2, \\ i = 1, 2, 3, \end{matrix}$$

sowie für  $\vec{S} = (0, 0, \delta_h(x))$

$$E_h^i(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{(\lambda + \mu) \eta_{-i} \eta_3}{(\mu d^2 - \varrho \omega^2)((\lambda + 2\mu)d^2 - \varrho \omega^2)} - \frac{\delta_{ij}}{\mu d^2 - \varrho \omega^2} \right) \quad \begin{matrix} j = 3, \\ i = 1, 2, 3. \end{matrix}$$

Hinsichtlich der praktischen Realisierung kann  $\vec{E}_h(x)$  mit Hilfe der Lösung zweier diskreter Dirac-Gleichungen darstellt werden. Erläutert wird diese Möglichkeit am Spezialfall  $\vec{S} = (\delta_h(x), 0, 0)$ .

Ausgehend von der Darstellung  $\vec{E}_h(x) = \vec{E}_{h1}(x) - \vec{E}_{h2}(x)$  mit

$$\begin{aligned} E_{h1}^i(x) &= (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{\eta_{-i} \eta_1 - \delta_{i1} d^2}{d^2(\mu d^2 - \varrho \omega^2)} \right) \quad \text{und} \\ E_{h2}^i(x) &= (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{\eta_{-i} \eta_1}{d^2((\lambda + 2\mu)d^2 - \varrho \omega^2)} \right) \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

gilt für die einzelnen Vektoren

$$\begin{aligned} \text{div}_h^- \vec{E}_{h1}(x) &= 0 \\ \text{rot}_h^+ \vec{E}_{h1}(x) &= -(2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\mu} \text{rot}_h^+ \vec{v} \quad \text{mit } \vec{v} = \left( R_h F \left( \frac{1}{d^2 - \varrho \omega^2 \mu^{-1}} \right), 0, 0 \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{div}_h^- \vec{E}_{h2}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\lambda + 2\mu} D_{-1} R_h F \left( \frac{1}{d^2 - \varrho \omega^2 (\lambda + 2\mu)^{-1}} \right) \\ \text{rot}_h^+ \vec{E}_{h2}(x) &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichungen hängt speziell von den Fundamentallösungen

$$-(2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{1}{d^2 - \varrho \omega^2 \mu^{-1}} \right) \quad \text{und} \quad -(2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{1}{d^2 - \varrho \omega^2 (\lambda + 2\mu)^{-1}} \right)$$

der Helmholtzgleichung ab, wobei  $\kappa^2 = \varrho \omega^2 \mu^{-1}$  bzw.  $\kappa^2 = \varrho \omega^2 (\lambda + 2\mu)^{-1}$  gilt.

## Die Fundamentallösung der Gleichungen der statischen Momente

Die Vektoren  $\vec{E}_h^a(x) = (E_h^{a1}(x), E_h^{a2}(x), E_h^{a3}(x))$  und  $\vec{E}_h^b(x) = (E_h^{b1}(x), E_h^{b2}(x), E_h^{b3}(x))$  beschreiben die Fundamentallösung des Systems

$$\begin{aligned} (\mu + a) \Delta_h \vec{E}_h^a(x) + (\lambda + \mu - a) \text{grad}_h^+ \text{div}_h^- \vec{E}_h^a(x) + 2a \text{rot}_h^- \vec{E}_h^b(x) &= \vec{S} \\ (\nu + \beta) \Delta_h \vec{E}_h^b(x) + (\varepsilon + \nu - \beta) \text{grad}_h^- \text{div}_h^+ \vec{E}_h^b(x) + 2a \text{rot}_h^+ \vec{E}_h^a(x) - 4a \vec{E}_h^b(x) &= \vec{V} \end{aligned} \quad (1.19)$$



in den Gitterpunkten  $x \in \mathbb{R}_h^3$ , wenn jeweils ein Vektor der rechten Seite die Möglichkeiten  $(\delta_h(x), 0, 0)$ ,  $(0, \delta_h(x), 0)$  und  $(0, 0, \delta_h(x))$  durchläuft und der andere identisch Null ist. Die Koeffizienten  $\mu, a, \lambda, \nu, \beta$  und  $\varepsilon$  genügen den Bedingungen  $\mu > 0$ ,  $\lambda + 2\mu > 0$ ,  $a > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon + 2\nu > 0$  und  $\beta > 0$ . Ersetzt man in der Definition von  $grad_h^+$ ,  $div_h^-$  und  $rot_h^+$  die Differenzenoperatoren  $D_j$  durch  $D_{-j}$  und umgekehrt, dann entspricht dies den Operatoren  $grad_h^-$ ,  $div_h^+$  und  $rot_h^-$ . Das System (1.19) kann in der Form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\vec{E}_h^a(x))^T \\ (\vec{E}_h^b(x))^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{S}^T \\ \vec{V}^T \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, wobei für die  $3 \times 3$ -Matrizen  $A, B, C$  und  $D$  gilt

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (\mu + a) \delta_{ij} \Delta_h + (\lambda + \mu - a) D_i D_{-j}, \\ D_{ij} &= (-4a + (\nu + \beta) \Delta_h) \delta_{ij} + (\varepsilon + \nu - \beta) D_{-i} D_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$$B = 2a \begin{pmatrix} 0 & -D_{-3} & D_{-2} \\ D_{-3} & 0 & -D_{-1} \\ -D_{-2} & D_{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = 2a \begin{pmatrix} 0 & -D_3 & D_2 \\ D_3 & 0 & -D_1 \\ -D_2 & D_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation berechneten Fundamentallösungen findet man in der Tabelle 1. Verwendet werden die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{(\mu + a)(\nu + \beta)d^2 + 4a\mu}, \quad t = \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)d^4}, \quad w = \frac{2as}{d^2}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \\ u &= \frac{1}{d^2(4a + d^2(\varepsilon + 2\nu))}, \quad p = \frac{a(\nu + \beta)s}{\mu}, \quad z = (\mu + a)s. \end{aligned}$$

Fall	Lösung $(i = 1, 2, 3)$
$\vec{S} = (\delta_h(x), 0, 0)$ $\vec{V} = (0, 0, 0)$	$E_h^{ai}(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F\left(\left(-\frac{1}{\mu d^2} + p\right) \delta_{i1} + \eta_1 \eta_{-i} \left(t - \frac{p}{d^2}\right)\right)$ $\vec{E}_h^b(x) = (2\pi)^{-3/2} (0, R_h F(w \eta_{-3}), R_h F(-w \eta_{-2}))$
$\vec{S} = (0, \delta_h(x), 0)$ $\vec{V} = (0, 0, 0)$	$E_h^{ai}(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F\left(\left(-\frac{1}{\mu d^2} + p\right) \delta_{i2} + \eta_2 \eta_{-i} \left(t - \frac{p}{d^2}\right)\right)$ $\vec{E}_h^b(x) = (2\pi)^{-3/2} (R_h F(-w \eta_{-3}), 0, R_h F(w \eta_{-1}))$
$\vec{S} = (0, 0, \delta_h(x))$ $\vec{V} = (0, 0, 0)$	$E_h^{ai}(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F\left(\left(-\frac{1}{\mu d^2} + p\right) \delta_{i3} + \eta_3 \eta_{-i} \left(t - \frac{p}{d^2}\right)\right)$ $\vec{E}_h^b(x) = (2\pi)^{-3/2} (R_h F(w \eta_{-2}), R_h F(-w \eta_{-1}), 0)$
$\vec{S} = (0, 0, 0)$ $\vec{V} = (\delta_h(x), 0, 0)$	$\vec{E}_h^a(x) = (2\pi)^{-3/2} (0, R_h F(-w \eta_3), R_h F(w \eta_2))$ $E_h^{bi}(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F\left(-z \delta_{i1} - \eta_i \eta_{-1} \left(u - \frac{z}{d^2}\right)\right)$
$\vec{S} = (0, 0, 0)$ $\vec{V} = (0, \delta_h(x), 0)$	$\vec{E}_h^a(x) = (2\pi)^{-3/2} (R_h F(w \eta_3), 0, R_h F(-w \eta_1))$ $E_h^{bi}(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F\left(-z \delta_{i2} - \eta_i \eta_{-2} \left(u - \frac{z}{d^2}\right)\right)$
$\vec{S} = (0, 0, 0)$ $\vec{V} = (0, 0, \delta_h(x))$	$\vec{E}_h^a(x) = (2\pi)^{-3/2} (R_h F(-w \eta_2), R_h F(w \eta_1), 0)$ $E_h^{bi}(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F\left(-z \delta_{i3} - \eta_i \eta_{-3} \left(u - \frac{z}{d^2}\right)\right)$

Tab.1

Zusätzlich kann die Lösung des Systems (1.19) durch diskrete Dirac-Gleichungen bestimmt werden. Betrachtet wird der Spezialfall  $\vec{S} = (\delta_h(x), 0, 0)$  und  $\vec{V} = (0, 0, 0)$ . Aus der Zerlegung  $\vec{E}_h^a(x) = \vec{E}_{h1}^a(x) + \vec{E}_{h2}^a(x)$  mit

$$\begin{aligned} E_{h1}^{ai}(x) &= (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( -\frac{\delta_{i1}}{\mu d^2} + \eta_1 \eta_{-i} t \right) \quad \text{und} \\ E_{h2}^{ai}(x) &= (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( p \delta_{i1} - \eta_1 \eta_{-i} \frac{p}{d^2} \right), \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h^- \vec{E}_{h1}^a(x) &= -(2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\lambda + 2\mu} D_{-1} R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right) \\ \operatorname{rot}_h^+ \vec{E}_{h1}^a(x) &= -(2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}_h^+ \vec{v} \quad \text{mit } \vec{v} = \left( R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right), 0, 0 \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h^- \vec{E}_{h2}^a(x) &= 0 \\ \operatorname{rot}_h^+ \vec{E}_{h2}^a(x) &= (2\pi)^{-3/2} \frac{a}{\mu(\mu + a)} \operatorname{rot}_h^+ \vec{v} \quad \text{mit } \vec{v} = \left( R_h F \left( \frac{1}{d^2 + \frac{4a\mu}{(\mu+a)(\nu+\beta)}} \right), 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Dabei ist  $(2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right)$  die diskrete Fundamentallösung des Laplaceoperators und  $(2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{1}{d^2 + \frac{4a\mu}{(\mu+a)(\nu+\beta)}} \right)$  die Fundamentallösung der Helmholtzgleichung.

Für  $\vec{E}_h^b(x)$  gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h^+ \vec{E}_h^b(x) &= 0 \\ \operatorname{rot}_h^- \vec{E}_h^b(x) &= \vec{c} \quad \text{mit} \quad c_i = \frac{2a}{(2\pi)^{3/2}} R_h F \left( \frac{(\eta_{-i} \eta_1 - \delta_{i1} d^2) s}{d^2} \right), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Der Vektor  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  auf der rechten Seite ist eine Lösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h^- \vec{c} &= 0 \\ \operatorname{rot}_h^+ \vec{c} &= \frac{-2a}{(2\pi)^{3/2}(\mu + a)(\nu + \beta)} \operatorname{rot}_h^+ \vec{v} \quad \text{mit } \vec{v} = \left( R_h F \left( \frac{1}{d^2 + \frac{4a\mu}{(\mu+a)(\nu+\beta)}} \right), 0, 0 \right). \end{aligned}$$

## Die Fundamentallösung der Stokesgleichungen

Für alle  $x \in \mathbb{R}_h^3$  wird die aus dem Vektor  $\vec{E}_h(x) = (E_h^1(x), E_h^2(x), E_h^3(x))$  und der Funktion  $P_h(x)$  bestehende Lösung der Gleichungen

$$-\nu \Delta_h \vec{E}_h(x) + \operatorname{grad}_h^- P_h(x) = \vec{S} \quad \text{und} \quad \operatorname{div}_h^+ \vec{E}_h(x) = K$$

gesucht, wenn einerseits  $\vec{S}$  die Vektoren  $(\delta_h(x), 0, 0)$ ,  $(0, \delta_h(x), 0)$  und  $(0, 0, \delta_h(x))$  durchläuft und  $K$  identisch Null ist und andererseits  $\vec{S} = \vec{0}$  und  $K = \delta_h(x)$  gilt.

Mittels diskreter Fouriertransformation wurden die folgenden Lösungen berechnet:

Fall	Lösung $(i = 1, 2, 3)$
$\vec{S} = (\delta_h(x), 0, 0)$ $K = 0$	$E_h^i(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{\delta_{i1}}{\nu d^2} - \frac{\eta_{-1}\eta_i}{\nu d^4} \right)$ $P_h(x) = -(2\pi)^{-3/2} D_1 R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right)$
$\vec{S} = (0, \delta_h(x), 0)$ $K = 0$	$E_h^i(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{\delta_{i2}}{\nu d^2} - \frac{\eta_{-2}\eta_i}{\nu d^4} \right)$ $P_h(x) = -(2\pi)^{-3/2} D_2 R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right)$
$\vec{S} = (0, 0, \delta_h(x))$ $K = 0$	$E_h^i(x) = (2\pi)^{-3/2} R_h F \left( \frac{\delta_{i3}}{\nu d^2} - \frac{\eta_{-3}\eta_i}{\nu d^4} \right)$ $P_h(x) = -(2\pi)^{-3/2} D_3 R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right)$
$\vec{S} = (0, 0, 0)$ $K = \delta_h(x)$	$E_h^i(x) = -(2\pi)^{-3/2} D_{-i} R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right)$ $P_h(x) = \nu \delta_h(x)$

Tab.2

Im Spezialfall Fall  $\vec{S} = (\delta_h(x), 0, 0)$  und  $K = 0$  ist der Vektor  $\vec{E}_h(x)$  eine Lösung der diskreten Dirac-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h^+ \vec{E}_h(x) &= 0 \\ \operatorname{rot}_h^- \vec{E}_h(x) &= (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\nu} \operatorname{rot}_h^- \vec{v} \quad \text{mit } \vec{v} = \left( R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right), 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Während man in den Fällen  $\vec{S} = (0, \delta_h(x), 0)$  und  $\vec{S} = (0, 0, \delta_h(x))$  ganz analoge Darstellungen erhält, beruht die Berechnung von  $\vec{E}_h(x)$  im Fall  $\vec{S} = \vec{0}$  sowie von  $P_h(x)$  im Fall  $K = 0$  direkt auf der Fundamentallösung des diskreten Laplaceoperators.

### Die Fundamentallösung der Gleichungen der Elektrostatik – ein Spezialfall der Maxwell-Gleichungen

In den Gitterpunkten  $x \in \mathbb{R}_h^3$  hat die Lösung  $\vec{E}_h(x) = (E_h^1(x), E_h^2(x), E_h^3(x))$  des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h^+ \vec{E}_h(x) &= \delta_h(x) \\ \operatorname{rot}_h^- \vec{E}_h(x) &= \vec{0} \end{aligned}$$

die Gestalt

$$E_h^i(x) = -(2\pi)^{-3/2} D_{-i} R_h F \left( \frac{1}{d^2} \right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Auch in diesem Fall ist der Zusammenhang zur diskreten Fundamentallösung des Laplaceoperators deutlich zu erkennen.

### 1.2.3 Instationäre Probleme

#### Die Fundamentallösung der Wärmeleitgleichung

Es sei  $I$  der identische Operator und  $h_t > 0$  die bezüglich der Zeit gewählte Schrittweite. Für die Differenzenoperatoren  $D_t$  und  $D_{-t}$  gilt  $D_t = h_t^{-1}(V_t - I)$  mit  $V_t v_h(t) = v_h(t + h_t)$  sowie  $D_{-t} = h_t^{-1}(I - V_{-t})$  mit  $V_{-t} v_h(t) = v_h(t - h_t)$ .

In den Gitterpunkten  $(x, t)$  mit  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_h^2$  und  $t \in \mathbb{R}_h^1$  wird die Differenzengleichung

$$((-a^2 \Delta_h + D_t) E_h)(x, t) = \delta_{h, h_t}(x, t) = \delta_h(x) \delta_{h_t}(t) = \begin{cases} h^{-2} h_t^{-1} & x_1 = x_2 = t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

untersucht. Die bezüglich des Ortes Fourier-transformierte Lösung dieser Gleichung hat im Quader  $Q_h$  die Gestalt

$$(F_h^{(x)} E_h)(\xi, t) = (2\pi)^{-1} \Theta(t) (1 - a^2 d^2 h_t)^{t/h_t - 1} \quad \text{mit} \quad \Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

und aus der Transformation  $F_h^{-1} = R_h F$  resultiert die Operatorgleichung

$$E_h(x, t) = \Theta(t) \left( (1 + a^2 h_t \Delta_h)^{t/h_t - 1} \delta_h \right) (x).$$

In der Arbeit [GH1] von GÜRLEBECK/HOMMEL wird das Konvergenzverhalten der diskreten Fundamentallösung analysiert. Dabei kann unter der Voraussetzung  $C^{-1} < h_t/h^2 < (3\pi^2 a^2)^{-1}$  gezeigt werden, daß

$$\|E_h - S_{h_t} R_h E\|_{l_1(G_h \times [0, \infty))} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad h \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad h_t \rightarrow 0$$

gilt, wenn

$$E(x, t) = \frac{\Theta(t)}{4a^2 \pi t} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}$$

die kontinuierliche Fundamentallösung und  $S_{h_t}$  die Einschränkung dieser Fundamentallösung auf das Gitter bezüglich der Zeit ist. Darüber hinaus sei  $G$  ein beschränktes Gebiet,  $G_h = (G \cap \mathbb{R}_h^2)$  das entsprechende diskrete Gebiet sowie  $C$  eine von  $h$  und  $h_t$  unabhängige Konstante. Für den von GÜRLEBECK/HOMMEL geführten Beweis ist die Bedingung an den Quotienten  $h_t/h^2$  notwendig und hinreichend.

Gleichzeitig enthält die Arbeit [GH1] ein Konvergenzresultat für die Fundamentallösung der impliziten Differenzengleichung

$$(-a^2 \Delta_h E_h)(x, t + h_t) + (D_t E_h)(x, t) = \delta_{h, h_t}(x, t).$$

## Die Fundamentallösung der Diffusionsgleichung

Für  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_h^2$  und  $t \in \mathbb{R}_h^1$  wird die Lösung der Differenzengleichung

$$((-a^2 \Delta_h + D_t - \beta) E_h)(x, t) = \delta_{h, h_t}(x, t)$$

gesucht. In Analogie zur Wärmeleitgleichung erhält man mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation die Darstellung

$$E_h(x, t) = \Theta(t) \left( (1 + \beta h_t + a^2 h_t \Delta_h)^{t/h_t - 1} \delta_h \right) (x).$$

## Die Fundamentallösung der Telegrafengleichung

Es sei  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_h^3$  und  $t \in \mathbb{R}_h^1$ . Untersucht wird die Differenzengleichung

$$((-a^2 \Delta_h + D_{-t} D_t + a_1 D_t + a_2) E_h)(x, t) = \delta_{h, h_t}(x, t) = \begin{cases} h^{-3} h_t^{-1} & x_1 = x_2 = x_3 = t = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die in diesem Fall mittels diskreter Fouriertransformation bezüglich des Ortes berechnete Fundamentallösung hat die Gestalt

$$E_h(x, t) = (2\pi)^{-3/2} \Theta(t) R_h F^{(x)} \left( \frac{h_t}{i\sqrt{D}} \left( (A + iB)^{t/h_t} - (A - iB)^{t/h_t} \right) \right).$$

Dabei sei

$$D = h_t^2 \left( 2(2 + a_1 h_t)(a^2 d^2 + a_2) - a_1^2 - h_t^2(a^2 d^2 + a_2)^2 \right)$$

$$\text{mit } d^2 = \frac{4}{h^2} \left( \sin^2 \frac{h\xi_1}{2} + \sin^2 \frac{h\xi_2}{2} + \sin^2 \frac{h\xi_3}{2} \right),$$

$$A = \frac{2 + a_1 h_t - h_t^2(a^2 d^2 + a_2)}{2(1 + a_1 h_t)} \quad \text{und} \quad B = \frac{\sqrt{D}}{2(1 + a_1 h_t)}.$$

Unter Verwendung des binomischen Satzes erhält man für alle Gitterpunkte  $x \in \mathbb{R}_h^3$  und  $t = s h_t \in \mathbb{R}_h^1$  die Darstellung

$$E_h(x, t) = \Theta(t) \frac{h_t}{1 + a_1 h_t} \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \frac{1 - (-1)^k}{2} \left( \tau^{s-k} \left( \tau^2 - \frac{1}{1 + a_1 h_t} \right)^{\frac{k-1}{2}} \delta_h \right) (x)$$

$$\text{mit } \tau = \frac{2 + a_1 h_t + h_t^2(a^2 \Delta_h - a_2)}{2(1 + a_1 h_t)}.$$

Die **Wellengleichung** ist ein Spezialfall dieser Gleichung mit den Koeffizienten  $a_1 = a_2 = 0$ .

## 1.2.4 Ausgewählte kanonische Probleme

Mit der Betrachtung von einigen kanonischen Differenzenrandwertproblemen soll die Untersuchung diskreter Fundamentallösungen abgeschlossen werden. Vermerkt sei, daß speziell auf diesem Gebiet aus der Literatur keine Aussagen bekannt sind.

### Die Fundamentallösung der Laplacegleichung im Halbraum

Der Punkt  $y = (y_1, y_2, y_3)$  sei ein beliebig ausgewählter Gitterpunkt aus dem Raum  $\mathbb{R}_h^{3+} = \{(ih, jh, kh) : i, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ . Für alle  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_h^{3+}$  wird die Lösung der Gleichung

$$-\Delta_h E_h^+(x, y) = \delta_h(x, y) = \begin{cases} h^{-3} & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

gesucht, wenn auf dem Rand  $x_3 = 0$  die Bedingung  $E_h^+(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3) = 0$  erfüllt ist. Bezeichnet man mit  $E_h(x - y)$  die diskrete Fundamentallösung im gesamten Raum  $\mathbb{R}_h^3$  und mit  $\bar{y}$  den Gitterpunkt  $(y_1, y_2, -y_3)$ , dann gilt für die zu berechnende Fundamentallösung  $E_h^+(x, y)$

$$E_h^+(x, y) = E_h(x - y) + a E_h(x - \bar{y}).$$

Der Koeffizient  $a = -1$  wird aus der Randbedingung und der Symmetrieeigenschaft  $E_h(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) = E_h(x_1 - y_1, x_2 - y_2, y_3 - x_3)$  bestimmt.

Ersetzt man die obige Randbedingung durch  $D_3 E_h^+(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3) = 0$ , dann erhält man für die Fundamentallösung im Halbraum die Darstellung

$$E_h^+(x, y) = E_h(x - y) + E_h(x - \bar{y}) - h D_{-3} E_h(x - \bar{y}).$$

### Die Fundamentallösung der Laplacegleichung in einer Viertelebene

In den Gitterpunkten  $x \in \mathbb{R}_h^{2++} = \{(ih, jh) : i, j \in \mathbb{N}\}$  ist die Differenzengleichung

$$-\Delta_h E_h^{++}(x, y) = \delta_h(x, y) = \begin{cases} h^{-2} & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

zu lösen, wenn  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_h^{2++}$  ein fest ausgewählter Gitterpunkt ist und auf den beiden Rändern die Bedingungen  $E_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) = 0$  und  $E_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) = 0$  erfüllt sind. Ausgehend von der Fundamentallösung  $E_h(x - y)$  in der ganzen Ebene wählt man den Ansatz

$$E_h^{++}(x, y) = E_h(x - y) + a E_h(x - \bar{y}) + b E_h(x - y') + c E_h(x - \bar{y}'),$$

wobei in den einzelnen Quadranten  $y = (y_1, y_2)$ ,  $\bar{y} = (y_1, -y_2)$ ,  $y' = (-y_1, y_2)$  und  $\bar{y}' = (-y_1, -y_2)$  gilt. Aus den Randbedingungen und der Symmetrieeigenschaft  $E_h(x_1 - y_1, x_2 - y_2) = E_h(y_1 - x_1, x_2 - y_2) = E_h(x_1 - y_1, y_2 - x_2) = E_h(y_1 - x_1, y_2 - x_2)$  folgt schließlich  $a = b = -1$  und  $c = 1$ .

Zusätzlich sind einige diskrete Fundamentallösungen  $E_h^{++}(x, y)$  berechnet worden, die andere Randbedingungen erfüllen. Die Resultate kann man der Tabelle 3 entnehmen. Bei der Vorgabe von zentralen Differenzen wird jeweils die Bezeichnung  $D_i^* = 2^{-1}(D_i + D_{-i})$ ,  $i = 1, 2$  verwendet.

Randbedingungen	Fundamentallösung $E_h^{++}(x, y)$
$D_1 E_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) = 0$ $E_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) = 0$	$E_h(x - y) - E_h(x - \bar{y}) + E_h(x - y') - E_h(x - \bar{y}') + h D_{-1} E_h(x - \bar{y}') - h D_{-1} E_h(x - y')$
$E_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) = 0$ $D_2 E_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) = 0$	$E_h(x - y) + E_h(x - \bar{y}) - E_h(x - y') - E_h(x - \bar{y}') - h D_{-2} E_h(x - \bar{y}) + h D_{-2} E_h(x - \bar{y}')$
$D_2 E_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) = 0$ $E_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) = 0$	$E_h(x - y) - E_h(x - \bar{y}) - E_h(x - y') + E_h(x - \bar{y}')$
$E_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) = 0$ $D_1 E_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) = 0$	$E_h(x - y) - E_h(x - \bar{y}) - E_h(x - y') + E_h(x - \bar{y}')$
$D_1^* E_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) = 0$ $D_2^* E_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) = 0$	$E_h(x - y) + E_h(x - \bar{y}) + E_h(x - y') + E_h(x - \bar{y}')$
$D_2^* E_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) = 0$ $D_1^* E_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) = 0$	$E_h(x - y) - E_h(x - \bar{y}) - E_h(x - y') + E_h(x - \bar{y}')$
$D_2 E_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) = 0$ $D_1 E_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) = 0$	$E_h(x - y) - E_h(x - \bar{y}) - E_h(x - y') + E_h(x - \bar{y}')$
$D_1 E_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) = 0$ $D_1 E_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) = 0$	$E_h(x - y) - E_h(x - \bar{y}) + E_h(x - y') - E_h(x - \bar{y}') + h D_{-1} E_h(x - \bar{y}') - h D_{-1} E_h(x - y')$
$D_2 E_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) = 0$ $D_2 E_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) = 0$	$E_h(x - y) + E_h(x - \bar{y}) - E_h(x - y') - E_h(x - \bar{y}') - h D_{-2} E_h(x - \bar{y}) + h D_{-2} E_h(x - \bar{y}')$

Tab.3

### Die Fundamentallösung zweier gekoppelter Halbräume, in denen die diskrete Laplacegleichung erfüllt ist

Es sei  $y \in \mathbb{R}_h^{3\pm} = \{(ih, jh, \pm kh) : i, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$  ein fest gewählter Gitterpunkt und  $\overline{\mathbb{R}_h^{3\pm}} = \mathbb{R}_h^{3\pm} \cup \{(ih, jh, 0) : i, j \in \mathbb{Z}\}$ . Für alle  $x \in (\mathbb{R}_h^{3+} \cup \mathbb{R}_h^{3-})$  wird die Lösung der Differenzengleichung

$$-\Delta_h \hat{E}_h(x, y) = \delta_h(x, y)$$

gesucht, die den Randbedingungen

$$\begin{aligned} (1) \quad & \hat{E}_h^+(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3) = \hat{E}_h^-(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3) \quad \text{und} \\ (2) \quad & \lambda_1 D_3^* \hat{E}_h^+(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3) = \lambda_0 D_3^* \hat{E}_h^-(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

genügt. Dabei gilt  $D_3^* = 2^{-1}(D_3 + D_{-3})$ ,  $\hat{E}_h^+ \subset \overline{\mathbb{R}_h^{3+}}$  und  $\hat{E}_h^+ = \hat{E}_h \forall x \in \mathbb{R}_h^{3+}$  sowie  $\hat{E}_h^- \subset \overline{\mathbb{R}_h^{3-}}$  und  $\hat{E}_h^- = \hat{E}_h \forall x \in \mathbb{R}_h^{3-}$ .

Ausgehend von der diskreten Fundamentallösung  $E_h(x, y)$  im ganzen Raum  $\mathbb{R}_h^3$  wählt man den Ansatz

$$\hat{E}_h(x, y) = \begin{cases} E_h(x - y) + a E_h(x - \bar{y}) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3+}} \\ b E_h(x - y) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3-}} \end{cases}$$

und aus den Randbedingungen (1) und (2) folgt  $a = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0}$  und  $b = \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0}$ .

Wenn der nicht veränderliche Gitterpunkt  $y$ , der auch als Quelle bezeichnet wird, zur Menge  $\mathbb{R}_h^{3-}$  gehört, dann erhält man die Lösung

$$\hat{E}_h(x, y) = \begin{cases} \frac{2\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0} E_h(x - y) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3+}} \\ E_h(x - y) + \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0} E_h(x - \bar{y}) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3-}}. \end{cases}$$

Wird andererseits die Randbedingung (2) durch die Beziehung

$$\lambda_1 D_3 \hat{E}_h^+(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3) = \lambda_0 D_{-3} \hat{E}_h^-(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3)$$

ersetzt, dann gilt für  $y \in \mathbb{R}_h^{3+}$

$$\hat{E}_h(x, y) = \begin{cases} E_h(x - y) + \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0} E_h(x - \bar{y}) - \frac{\lambda_1 h}{\lambda_1 + \lambda_0} D_{-3} E_h(x - \bar{y}) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3+}} \\ \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0} E_h(x - y) + \frac{\lambda_1 h}{\lambda_1 + \lambda_0} D_3 E_h(x - y) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3-}}, \end{cases}$$

und für  $y \in \mathbb{R}_h^{3-}$

$$\hat{E}_h(x, y) = \begin{cases} \frac{2\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0} E_h(x - y) - \frac{\lambda_0 h}{\lambda_1 + \lambda_0} D_{-3} E_h(x - y) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3+}} \\ E_h(x - y) + \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0} E_h(x - \bar{y}) + \frac{\lambda_0 h}{\lambda_1 + \lambda_0} D_3 E_h(x - \bar{y}) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3-}}. \end{cases}$$

Zur Berechnung der diskreten Fundamentallösung in zwei gekoppelten Halbräumen, in denen die Helmholtzgleichung oder eine der instationären Gleichungen erfüllt ist, kann die vorgestellte Methode auch verwendet werden. In diesen Fällen gilt für die Fouriertransformierten der zum ganzen Raum gehörenden Fundamentallösungen  $(F_h E_h)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (F_h E_h)(-\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (F_h E_h)(\xi_1, -\xi_2, \xi_3) = (F_h E_h)(\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$ , so daß die Symmetrieeigenschaft

$$\begin{aligned} E_h(x_1, x_2, x_3) &= E_h(-x_1, x_2, x_3) = E_h(x_1, -x_2, x_3) = E_h(x_1, x_2, -x_3) \\ &= \frac{8}{(2\pi)^{3/2}} R_h \int_0^{\pi/h} \int_0^{\pi/h} \int_0^{\pi/h} (F_h E_h)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cos(x_1 \xi_1) \cos(x_2 \xi_2) \cos(x_3 \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned}$$

zur Bestimmung der Koeffizienten im entsprechenden Ansatz genutzt werden kann.

In diesem Kapitel wurden jedoch auch diskrete Fundamentallösungen berechnet, die diese Symmetrieeigenschaft nicht besitzen. Am Beispiel der Laméschen Gleichungen soll für einen dieser Fälle eine Möglichkeit zur Berechnung der Fundamentallösung in zwei gekoppelten Halbräumen angegeben werden.



## Die Fundamentallösung für zwei gekoppelte Halbräume, in denen die Laméschen Gleichungen erfüllt sind

Es sei  $y \in \mathbb{R}_h^{3+}$  ein fest gewählter Gitterpunkt. Gesucht wird die Fundamentallösung  $\vec{E}_h(x, y) = (\hat{E}_h^1(x, y), \hat{E}_h^2(x, y), \hat{E}_h^3(x, y))$  der Gleichungen

$$\begin{aligned}\mu \Delta_h \vec{E}_h(x, y) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}_h^+ \operatorname{div}_h^- \vec{E}_h(x, y) &= \vec{S} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_h^{3+} \\ \mu \Delta_h \vec{E}_h(x, y) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}_h^- \operatorname{div}_h^+ \vec{E}_h(x, y) &= \vec{0} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_h^{3-}\end{aligned}$$

mit der rechten Seite  $\vec{S}$  aus der Menge  $\{(\delta_h(x, y), 0, 0), (0, \delta_h(x, y), 0), (0, 0, \delta_h(x, y))\}$  und den Randbedingungen

$$\begin{aligned}(1) \quad & \hat{E}_h^{i+}(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3) = \hat{E}_h^{i-}(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3) \quad \text{und} \\ (2) \quad & \lambda_1 D_3^* \hat{E}_h^{i+}(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3) = \lambda_0 D_3^* \hat{E}_h^{i-}(x_1, x_2, 0, y_1, y_2, y_3), \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Insbesondere soll der Fall  $\vec{S} = (\delta_h(x, y), 0, 0)$  untersucht werden. Betrachtet man die obigen Differenzengleichungen im gesamten Raum  $\mathbb{R}_h^3$  und wählt man in beiden Fällen als rechte Seite  $\vec{S} = (\delta_h(x, y), 0, 0)$ , dann erhält man im Bildbereich der diskreten Fouriertransformation die Lösungen

$$\begin{aligned}(F_h E_{h1}^i)(\xi) &= (2\pi)^{-3/2} \left( \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\eta_{-i} \eta_1}{d^4} - \frac{\delta_{i1}}{\mu d^2} \right) \quad \text{und} \\ (F_h E_{h2}^i)(\xi) &= (2\pi)^{-3/2} \left( \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\eta_i \eta_{-1}}{d^4} - \frac{\delta_{i1}}{\mu d^2} \right) \quad i = 1, 2, 3\end{aligned}$$

mit  $\eta_{\pm i} = h^{-1} (1 - e^{\pm i h \xi_i})$ . Eine einfache Substitution zeigt, daß

$$(F F_h E_{h1}^i)(x - y) = (F F_h E_{h2}^i)(y - x) \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.20)$$

gilt. Zur Bestimmung der Lösung  $\vec{E}_h(x, y)$  wird der Ansatz

$$\vec{E}_h(x, y) = \begin{cases} \vec{E}_{h1}(x - y) + a \vec{E}_{h1}(\overline{x - y}) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3+}} \\ b \vec{E}_{h2}(y - x) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3-}} \end{cases}$$

mit  $\vec{E}_{h1}(\overline{x - y}) = \vec{E}_{h1}(x_1 - y_1, x_2 - y_2, -x_3 - y_3)$  gewählt. Aus den Randbedingungen und der Beziehung (1.20) folgt  $a = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0}$  und  $b = \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0}$ . Im Fall  $y \in \mathbb{R}_h^{3-}$  resultiert aus dem Ansatz

$$\vec{E}_h(x, y) = \begin{cases} c \vec{E}_{h1}(y - x) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3+}} \\ \vec{E}_{h2}(x - y) + d \vec{E}_{h2}(\overline{x - y}) & \text{für } x \in \overline{\mathbb{R}_h^{3-}} \end{cases}$$

$c = \frac{2\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0}$  und  $d = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0}$ . Dabei gilt  $(F F_h E_{h1}^i)(y - x) = (F F_h E_{h2}^i)(x - y)$  für alle  $i = 1, 2, 3$  und  $\vec{E}_{h2}(\overline{x - y}) = \vec{E}_{h2}(x_1 - y_1, x_2 - y_2, -x_3 - y_3)$ .

Auf analoge Weise kann die Fundamentallösung für die Differenzengleichungen mit den rechten Seiten  $\vec{S} = (0, \delta_h(x, y), 0)$  und  $\vec{S} = (0, 0, \delta_h(x, y))$  bestimmt werden.

## Die Fundamentallösung für vier gekoppelte Viertelebenen, in denen die Laplacegleichung erfüllt ist

Zur Abkürzung werden die zu den vier Viertelebenen gehörenden Gitterpunkt-mengen in der Form  $\mathbb{R}_h^{2\pm\pm} = \mathbb{R}_h^{2++} \cup \mathbb{R}_h^{2--} = \{(\pm ih, jh) : i, j \in \mathbb{N}\}$  und  $\mathbb{R}_h^{2\pm-} = \mathbb{R}_h^{2+-} \cup \mathbb{R}_h^{2-+} = \{(\pm ih, -jh) : i, j \in \mathbb{N}\}$  geschrieben. Gesucht wird für alle Punkte  $x \in (\mathbb{R}_h^{2\pm+} \cup \mathbb{R}_h^{2\pm-})$  und einen festen Punkt  $y \in \mathbb{R}_h^{2++}$  die Lösung der Differenzengleichung

$$-\Delta_h \hat{E}_h(x, y) = \delta_h(x, y),$$

die auf den einzelnen Rändern den Bedingungen

$$\begin{aligned} \hat{E}_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) &= \hat{E}_h^{+-}(x_1, 0, y_1, y_2) \\ \hat{E}_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) &= \hat{E}_h^{-+}(0, x_2, y_1, y_2) \\ \hat{E}_h^{--}(x_1, 0, y_1, y_2) &= \hat{E}_h^{--}(x_1, 0, y_1, y_2) \\ \hat{E}_h^{--}(0, x_2, y_1, y_2) &= \hat{E}_h^{--}(0, x_2, y_1, y_2) \\ \lambda_1 D_2^* \hat{E}_h^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) &= \lambda_4 D_2^* \hat{E}_h^{+-}(x_1, 0, y_1, y_2) \\ \lambda_1 D_1^* \hat{E}_h^{++}(0, x_2, y_1, y_2) &= \lambda_2 D_1^* \hat{E}_h^{-+}(0, x_2, y_1, y_2) \\ \lambda_2 D_2^* \hat{E}_h^{-+}(x_1, 0, y_1, y_2) &= \lambda_3 D_2^* \hat{E}_h^{--}(x_1, 0, y_1, y_2) \\ \lambda_4 D_1^* \hat{E}_h^{+-}(0, x_2, y_1, y_2) &= \lambda_3 D_1^* \hat{E}_h^{--}(0, x_2, y_1, y_2) \end{aligned}$$

genügt. Die neben den zentralen Differenzen  $D_1^*$  und  $D_2^*$  verwendeten Bezeichnungen kann man der Abbildung 2 entnehmen.

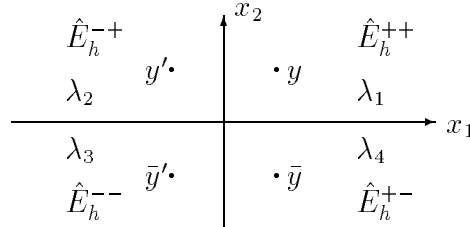


Abb. 2

Ausgehend von der Fundamentallösung  $E_h$  auf dem gesamten Gitter  $\mathbb{R}_h^2$  und der Gestalt der Fundamentallösung in einer Viertelebene wählt man den Lösungsansatz

$$\hat{E}_h(x, y) = \begin{cases} E_h(x - y) + a_1 E_h(x - \bar{y}) + b_1 E_h(x - y') + c_1 E_h(x - \bar{y}') & x \in \overline{\mathbb{R}_h^{2++}} \\ a_2 E_h(x - y) + b_2 E_h(x - \bar{y}) + c_2 E_h(x - \bar{y}') & x \in \overline{\mathbb{R}_h^{2+-}} \\ a_3 E_h(x - y) + b_3 E_h(x - y') + c_3 E_h(x - \bar{y}') & x \in \overline{\mathbb{R}_h^{2-+}} \\ a_4 E_h(x - y) + b_4 E_h(x - \bar{y}) + c_4 E_h(x - y') & x \in \overline{\mathbb{R}_h^{2--}}. \end{cases}$$

Dabei gilt  $\overline{\mathbb{R}_h^{2\pm\pm}} = \overline{\mathbb{R}_h^{2++}} \cup \overline{\mathbb{R}_h^{2--}} = \mathbb{R}_h^{2\pm\pm} \cup \{(\pm ih, 0) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, jh) : j \in \mathbb{N}\}$  und  $\overline{\mathbb{R}_h^{2\pm-}} = \overline{\mathbb{R}_h^{2+-}} \cup \overline{\mathbb{R}_h^{2-+}} = \mathbb{R}_h^{2\pm-} \cup \{(\pm ih, 0) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, -jh) : j \in \mathbb{N}\}$ . Die Koeffizienten  $a_i$ ,  $b_i$  und  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  werden aus den Randbedingungen und der Eigenschaft  $E_h(x_1, x_2) = E_h(-x_1, x_2) = E_h(x_1, -x_2) = E_h(-x_1, -x_2)$  bestimmt.

Unter der Zusatzbedingung  $\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4$  hat das entstehende Gleichungssystem die Lösung

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_4}, & a_2 &= \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, & a_3 &= \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_4}, & a_4 &= \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_4}, \\ b_1 &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, & b_2 &= \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_4}, & b_3 &= \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_4} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, & b_4 &= 0, \\ c_1 &= \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_4} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, & c_2 &= 0, & c_3 &= 0, & c_4 &= 0. \end{aligned}$$

Liegt der Gitterpunkt  $y$  in einem anderen Quadranten, dann kann die gesuchte Fundamentallösung in gleicher Weise berechnet werden.

Die soeben berechnete Fundamentallösung  $\hat{E}_h(x, y)$  kann man auch benutzen, um die Lösung der folgenden Randwertprobleme zu bestimmen.

Der Abbildung 3 entsprechend wird für  $x \in (\mathbb{R}_h^{2++} \cup \mathbb{R}_h^{2-+})$  und einen ausgewählten Gitterpunkt  $y \in \mathbb{R}_h^{2++}$  die Lösung der Differenzengleichung

$$-\Delta_h \hat{E}_{hi}(x, y) = \delta_h(x, y), \quad i = 1, 2$$

gesucht, die im Fall  $i = 1$  den Randbedingungen

$$\begin{aligned} D_2^* \hat{E}_{h1}^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) &= 0, & \hat{E}_{h1}^{++}(0, x_2, y_1, y_2) &= \hat{E}_{h1}^{-+}(0, x_2, y_1, y_2), \\ D_2^* \hat{E}_{h1}^{-+}(x_1, 0, y_1, y_2) &= 0, & \lambda_1 D_1^* \hat{E}_{h1}^{++}(0, x_2, y_1, y_2) &= \lambda_2 D_1^* \hat{E}_{h1}^{-+}(0, x_2, y_1, y_2) \end{aligned}$$

und im Fall  $i = 2$  den Bedingungen

$$\begin{aligned} \hat{E}_{h2}^{++}(x_1, 0, y_1, y_2) &= 0, & \hat{E}_{h2}^{++}(0, x_2, y_1, y_2) &= \hat{E}_{h2}^{-+}(0, x_2, y_1, y_2), \\ \hat{E}_{h2}^{-+}(x_1, 0, y_1, y_2) &= 0, & \lambda_1 D_1^* \hat{E}_{h2}^{++}(0, x_2, y_1, y_2) &= \lambda_2 D_1^* \hat{E}_{h2}^{-+}(0, x_2, y_1, y_2) \end{aligned}$$

genügt.

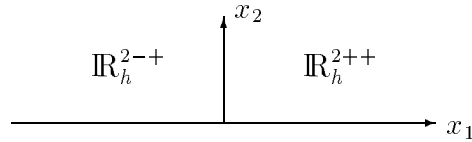


Abb. 3

Die Parameter  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind durch die Randbedingungen festgelegt. Weiterhin sei  $\lambda_3 = \frac{\lambda_2 \lambda_4}{\lambda_1}$ . Durch den Grenzübergang  $\lambda_4 \rightarrow 0$  ergeben sich im Fall  $i = 1$  aus der obigen Darstellung für  $\hat{E}_h(x, y)$  in den Gitterpunkten  $x \in (\mathbb{R}_h^{2++} \cup \mathbb{R}_h^{2-+})$  die Koeffizienten

$$a_1 = 1, \quad a_2 = b_2 = \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad b_1 = c_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad c_2 = 0.$$

Analog erhält man im Fall  $i = 2$  für  $\lambda_4 \rightarrow \infty$

$$a_1 = -1, \quad a_2 = -b_2 = \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad b_1 = -c_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad c_2 = 0.$$

Der Abschnitt 1.2 soll deutlich machen, daß man diskrete Fundamentallösungen für Probleme unterschiedlichster Art berechnen kann. Während in vielen Fällen die Analogie zu den kontinuierlichen Lösungen offensichtlich ist, haben vor allem die Fundamentallösungen der instationären Probleme ihre eigene Struktur. Erst durch gezielte Konvergenzuntersuchungen erkennt man auch hier die enge Verwandtschaft zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung.

Mittels diskreter Fouriertransformation und der dazugehörigen Rücktransformation erhält man die zu bestimmenden diskreten Fundamentallösungen zunächst in Integralform. Speziell bei den im Abschnitt 1.2.2 betrachteten Gleichungssystemen sind die erzielten Integraldarstellungen jedoch so kompliziert, daß eine möglichst genaue numerische Berechnung der Fundamentallösungen schwierig ist. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit auf andere Berechnungsmöglichkeiten orientiert. Die Grundidee besteht im Lösen von diskreten Dirac-Gleichungen, deren rechte Seite meist von der Fundamentallösung der Laplace- bzw. Helmholtzgleichung abhängt. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der diskreten Dirac-Gleichungen ist im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht worden, da im folgenden hauptsächlich die diskrete Fundamentallösung der Laplacegleichung im Mittelpunkt steht. Eine genaue Analyse dieser Gleichungen sollte deshalb als ein Schwerpunkt bei der zukünftigen Arbeit mit den entsprechenden diskreten Fundamentallösungen betrachtet werden.

## Kapitel 2

# Theorie der Differenzenpotentiale

Bereits seit Ende der 60-er Jahre beschäftigt sich RYABENKIJ mit der Konstruktion von Differenzenpotentialen und den damit verbundenen Methoden zur Lösung von Dirichlet- und Neumannproblemen. Das Ziel dieser Methoden besteht im Lösen von linearen Gleichungssystemen auf dem Rand, bei denen die Äquivalenz zum Ausgangsproblem gewahrt wird. Die Definition der Differenzenpotentiale erfolgt im Zusammenhang mit dem in der Einleitung zitierten Theorem von SEELEY, wobei im Kern der Potentiale die diskrete Fundamentallösung oder Greensche Funktion steht. Neben der üblicherweise betrachteten Menge der Randgitterpunkte wird eine ausgewählte Teilmenge der zum diskreten Gebiet gehörenden inneren Gitterpunkte als innere Randschicht bezeichnet. Auf diese Weise ist nicht nur eine einfache Definition der diskreten Normalableitungen möglich, auch grundlegende potentialtheoretische Eigenschaften können bewiesen werden. In der vorliegenden Arbeit wird vor allem durch die Zerlegung des Differenzenpotentials in ein diskretes Einfach- und Doppelschichtpotential ein entscheidender qualitativer Fortschritt erzielt, der es ermöglicht, die Theorie der Differenzenpotentiale weiter auszubauen. Dabei stehen hauptsächlich Existenz- und Eindeutigkeitssätze zur Lösbarkeit der Differenzenrandwertprobleme im Mittelpunkt. Ein wichtiges Hilfsmittel zum Beweis dieser Sätze sind die diskreten Greenschen Formeln. Während die von RYABENKIJ beschriebene Methode auf überbestimmte Gleichungssysteme führt, können die im folgenden betrachteten Differenzenrandwertprobleme durch geeignete Potentialansätze unmittelbar gelöst werden. Da das gesamte Konzept nur für die Laplacegleichung in der Ebene erarbeitet wird, sei betont, daß eine Übertragung der grundlegenden Ideen auf andere Problemstellungen möglich ist.

Während man einige der in diesem Kapitel vorgestellten Beweismethoden aus der klassischen Theorie übertragen kann, ist an anderen Stellen eine völlig neue Herangehensweise erforderlich. Besonders deutlich wird dies beim Fallen der Differenzenableitung einer diskret harmonischen Funktion  $u_h(mh)$  im Unendlichen wie  $1/|mh|^2$ .

Ein Beweis mittels Kelvintransformation entfällt, da die Gültigkeit der Aussage auf dem Gitter  $\mathbb{R}_h^2$  zu zeigen ist.

In Analogie zur klassischen Potentialtheorie in der Ebene spielt das annähernd logarithmische Verhalten der diskreten Fundamentallösung eine entscheidende Rolle. Der zweidimensionale Fall wird in dieser Arbeit untersucht, weil er einerseits im Vergleich zum dreidimensionalen Fall der theoretisch anspruchsvollere ist und weil er andererseits numerisch leichter zu bearbeiten und zu testen ist. Gerade in der Einheit zwischen Theorie und praktischer Umsetzung liegt ein wesentlicher Vorteil der Methode der Differenzenpotentiale, der in dieser Arbeit deutlich gemacht werden soll. Bei räumlichen Problemen fällt die diskrete Fundamentallösung und auch deren Ableitungen im Unendlichen, so daß weder bei der Arbeit mit den Greenschen Formeln noch bei der Bearbeitung von äußeren Randwertproblemen theoretische Schwierigkeiten auftreten werden. Zu erwarten sind lediglich aufwendigere Darstellungen.

## 2.1 Diskrete Potentiale und Greensche Formeln

### 2.1.1 Grundlagen für die Bearbeitung innerer Probleme

Es sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit dem stückweise glatten Rand  $\Gamma$ ,  $M = \{m = (m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, (m_1h, m_2h) \in (G \cap \mathbb{R}_h^2)\}$  und  $K = \{(0, 0); (1, 0); (-1, 0); (0, 1); (0, -1)\}$ . Durchläuft  $m$  die Menge  $M$ , dann ist  $N$  die Vereinigung aller Fünf-Punkte-Stern-Umgebungen  $N_m = \{m + k : k \in K\}$ . In allen Punkten  $r = (r_1, r_2) \in N$  sei  $K_r = \{k \in K : r + k \notin M\}$ . In Analogie zur Betrachtungsweise von RYABENKIJ entspricht dem Gebiet  $G$  das diskrete Gebiet  $G_h = \{(m_1h, m_2h) : m = (m_1, m_2) \in M\}$  mit der doppelten diskreten Randschicht  $\gamma_h = \{rh : r \in N \text{ und } K_r \neq \emptyset\}$ . Dabei gehören alle Punkte  $rh$  mit  $k = (0, 0) \in K_r$  zur äußeren Randschicht  $\gamma_h^- \subset \gamma_h$ , während die innere Randschicht  $\gamma_h^+$  aus den inneren Punkten  $rh \in \gamma_h \setminus \gamma_h^-$  besteht. Die folgende Abbildung soll die eingeführten Bezeichnungen noch einmal verdeutlichen.

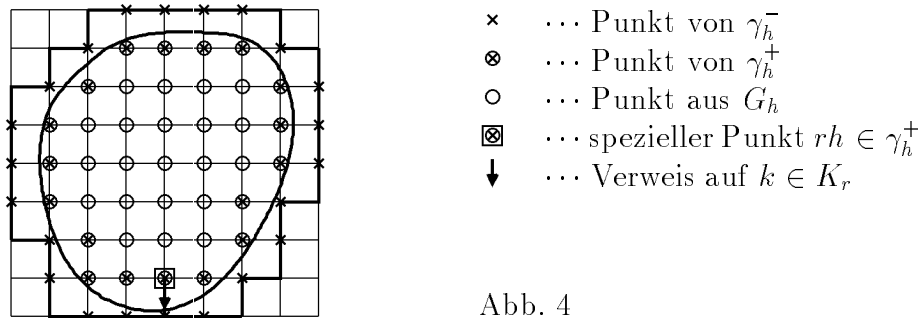


Abb. 4

Mit Hilfe der Symbolik  $r \in \gamma$  bzw.  $r \in \gamma^+$  und  $r \in \gamma^-$  werden im weiteren die Randpunkte  $rh \in \gamma_h$  ohne die Schrittweite  $h$  gekennzeichnet. Ausgangspunkt der Untersuchungen ist die Differenzengleichung

$$-\Delta_h u_h(mh) = \sum_{k \in K} a_k u_h(mh - kh) = f_h(mh) \quad \forall mh \in G_h$$

mit den Koeffizienten  $a_k = \begin{cases} -1/h^2 & \text{für } k \in K, k \neq (0,0) \\ 4/h^2 & \text{für } k = (0,0). \end{cases}$

**Lemma 2.1:** *Es sei  $E_h(x)$  die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte Fundamentallösung des Laplaceoperators in der Ebene. In allen Punkten  $lh \in \mathbb{R}_h^2$  gilt*

$$\sum_{r \in \gamma} \left( \sum_{k \in K_r} E_h(lh - (r+k)h) a_k h^2 \right) u_h(rh) + \sum_{m \in M} E_h(lh - mh) f_h(mh) h^2 = \begin{cases} u_h(lh), & l \in N \\ 0, & l \notin N. \end{cases}$$

**Beweis:** Substituiert man die Variable  $m$  im Ausdruck

$$(V_h f_h)(lh) := \sum_{m \in M} E_h(lh - mh) f_h(mh) h^2 = \sum_{m \in M} \sum_{k \in K} E_h(lh - mh) a_k h^2 u_h(mh - kh)$$

durch  $n + k$  mit  $n \in N$  und  $k \in K \setminus K_n$ , dann erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned} (V_h f_h)(lh) &= \sum_{n \in N} \left( \sum_{k \in K \setminus K_n} E_h(lh - (n+k)h) a_k h^2 \right) u_h(nh) \\ &= \sum_{n \in N} \left( \sum_{k \in K} E_h(lh - (n+k)h) a_k h^2 \right) u_h(nh) - \sum_{n \in N} \left( \sum_{k \in K_n} E_h(lh - (n+k)h) a_k h^2 \right) u_h(nh). \end{aligned}$$

Laut Definition ist die Menge  $K_n$  für alle  $n \in N \setminus \gamma$  leer. Daher gilt

$$\sum_{n \in N} \left( \sum_{k \in K_n} E_h(lh - (n+k)h) a_k h^2 \right) u_h(nh) = \sum_{n \in \gamma} \left( \sum_{k \in K_n} E_h(lh - (n+k)h) a_k h^2 \right) u_h(nh).$$

Die Behauptung des Lemmas folgt aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{n \in N} \left( \sum_{k \in K} E_h(lh - nh - kh) a_k h^2 \right) u_h(nh) &= \sum_{n \in N} \left( -\Delta_h E_h(lh - nh) h^2 \right) u_h(nh) \\ &= \sum_{n \in N} \left( \delta_h(lh - nh) h^2 \right) u_h(nh) \quad \text{mit} \quad \delta_h(lh - nh) = \begin{cases} 1/h^2 & \text{für } l = n \\ 0 & \text{für } l \neq n \end{cases} \blacksquare \end{aligned}$$

Betrachtet man nur die Gitterpunkte  $lh : l \in N$ , dann ist die Darstellung für  $u_h(lh)$  in Lemma 2.1 ein diskretes Analogon der Integraldarstellung für Funktionen aus  $C^2$ . Insbesondere wird durch

$$\begin{aligned} (P_h u_h)(lh) &:= u_h(lh) - (V_h f_h)(lh) = u_h(lh) - (-V_h \Delta_h u_h)(lh) \\ &= \sum_{r \in \gamma} \left( \sum_{k \in K_r} E_h(lh - (r+k)h) a_k h^2 \right) u_h(rh) \end{aligned}$$

das von RYABENKIJ untersuchte Differenzenpotential definiert. Noch deutlicher wird der Zusammenhang zwischen der Integraldarstellung und der entsprechenden diskreten Formulierung durch die Aufspaltung von  $(P_h u_h)(lh)$  in ein diskretes Einfach- und Doppelschichtpotential. Die damit verbundene Definition der beiden diskreten Potentiale ist als Ausgangspunkt für den weiteren Ausbau der Theorie der Differenzenpotentiale zu betrachten. Nur mit Hilfe dieser Definition ist es möglich, potentialtheoretische Aussagen zu formulieren, die weit über die bisherigen Ergebnisse von RYABENKIJ hinausgehen und zugleich die Einheit zwischen der diskreten und der klassischen Theorie widerspiegeln. Bezeichnet man mit  $u_R(rh) = u_h(rh)$  die Randwerte und mit  $u_A(rh) = h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_r} (u_h(rh) - u_h((r+k)h))$  die diskreten Normalableitungen in den Punkten  $rh$  der äußeren Randschicht  $\gamma_h^-$ , dann hat das diskrete Einfachschichtpotential die Gestalt

$$(P_h^E u_A)(lh) := \sum_{r \in \gamma^-} u_A(rh) E_h(lh - rh) h.$$

Das Potential der Doppelschicht wird definiert durch

$$(P_h^D u_R)(lh) := \begin{cases} \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r+k)h)) u_R(rh) & l \in M \\ \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r+k)h)) u_R(rh) - u_R(lh) & l \in \gamma^- \end{cases}$$

**Satz 2.1:** In allen Gitterpunkten  $lh$  mit  $l \in N = (M \cup \gamma^-)$  gilt

$$(P_h u_h)(lh) = (P_h^E u_A)(lh) - (P_h^D u_R)(lh).$$

**Beweis:** In der Darstellung für  $(P_h u_h)(lh)$  wird entsprechend den beiden Randschichten die Summe über  $\gamma$  in zwei Teilsummen zerlegt. Dabei gilt für alle  $r \in \gamma^-$

$$\begin{aligned} (P_h^\alpha u_h)(lh) &:= \sum_{r \in \gamma^-} \left( \sum_{k \in K_r} E_h(lh - (r+k)h) a_k h^2 \right) u_h(rh) \\ &= \sum_{r \in \gamma^-} \left( -\Delta_h E_h(lh - rh) h^2 \right) u_h(rh) - \sum_{r \in \gamma^-} \left( \sum_{k \in K \setminus K_r} E_h(lh - (r+k)h) a_k h^2 \right) u_h(rh) \\ &= \begin{cases} u_h(lh) + \sum_{r \in \gamma^-} \left( \sum_{k \in K \setminus K_r} E_h(lh - (r+k)h) \right) u_h(rh) & \text{für } l \in \gamma^- \\ \sum_{r \in \gamma^-} \left( \sum_{k \in K \setminus K_r} E_h(lh - (r+k)h) \right) u_h(rh) & \text{für } l \in M. \end{cases} \end{aligned}$$

Aus der Substitution  $r = s+k$  mit  $s \in \gamma^+$  und  $k \in K_s$  folgt für die zweite Teilsumme

$$\begin{aligned} (P_h^\beta u_h)(lh) &:= \sum_{s \in \gamma^+} \left( \sum_{k \in K_s} E_h(lh - (s+k)h) a_k h^2 \right) u_h(sh) \\ &= - \sum_{s \in \gamma^+} \left( \sum_{k \in K_s} E_h(lh - (s+k)h) \right) u_h(sh) = - \sum_{r \in \gamma^-} \left( \sum_{-k \in K \setminus K_r} u_h((r+(-k))h) \right) E_h(lh - rh). \end{aligned}$$



Auf Grund der Beziehungen

$$\begin{aligned} -(P_h^D u_R)(lh) &= (P_h^\alpha u_h)(lh) - \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} E_h(lh - rh) u_h(rh) \quad \text{und} \\ (P_h^E u_A)(lh) &= (P_h^\beta u_h)(lh) + \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} E_h(lh - rh) u_h(rh) \end{aligned}$$

ist der Satz vollständig bewiesen ■

**Bemerkung 2.1:** In Analogie zu den Integralgleichungen der klassischen Potentialtheorie resultiert aus Lemma 2.1 und Satz 2.1 im Fall  $f_h(mh) = 0$  und  $lh \in \gamma_h^-$

$$u_R(lh) = (P_h^E u_A)(lh) - (P_h^D u_R)(lh)$$

$$u_A(lh) = h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_l} \left( (P_h^E u_A)(lh) - (P_h^D u_R)(lh) - (P_h^E u_A)((l+k)h) + (P_h^D u_R)((l+k)h) \right).$$

Eine Funktion  $u_h(mh)$  heißt *diskret harmonisch im Gitterpunkt*  $mh \in \mathbb{R}_h^2$ , wenn sie in diesem Punkt die Differenzengleichung  $-\Delta_h u_h(mh) = 0$  erfüllt. Ist die Funktion  $u_h(mh)$  in jedem Punkt  $mh \in G_h \subset \mathbb{R}_h^2$  diskret harmonisch, dann wird sie als *diskret harmonische Funktion in  $G_h$*  bezeichnet.

**Lemma 2.2:** Die Potentiale  $(P_h^E u_A)(mh)$  und  $(P_h^D u_R)(mh)$  sind diskret harmonische Funktionen in  $G_h = \{(m_1 h, m_2 h) : m = (m_1, m_2) \in M\}$ .

**Beweis:** Für das Einfachschichtpotential gilt

$$-\Delta_h (P_h^E u_A)(mh) = \sum_{r \in \gamma^-} u_A(rh) (-\Delta_h E_h(mh - rh)) h = 0.$$

Beim Potential der Doppelschicht erhält man speziell in den Punkten  $m \in \gamma^+$

$$\begin{aligned} -\Delta_h (P_h^D u_R)(mh) &= \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} (-\Delta_h E_h(mh - rh) + \Delta_h E_h(mh - (r+k)h)) u_R(rh) \\ &\quad + h^{-2} \sum_{k \in K_m} u_R((m+k)h) \\ &= -h^{-2} \sum_{-k \in K_m} u_R((m+(-k))h) + h^{-2} \sum_{k \in K_m} u_R((m+k)h) = 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ein wichtiges Hilfsmittel, das vor allem beim Beweis der Eindeigkeitssätze im Abschnitt 2.2 eine wesentliche Rolle spielt, sind die diskreten Greenschen Formeln. Zur Formulierung der ersten Greenschen Formel wird die äußere Randschicht  $\gamma_h^-$  in die vier Teilränder  $\gamma_{hi}^- = \{rh : r \in \gamma^- \text{ und } r + k_i \in M\}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  mit  $k_1 = (-1, 0)$ ,  $k_2 = (0, -1)$ ,  $k_3 = (1, 0)$  und  $k_4 = (0, 1)$  zerlegt. Eingeführt wird ferner die Bezeichnung  $\gamma_i^- = \{r \in \gamma^- : r + k_i \in M\}$ . Die einzelnen Teilränder überlagern sich speziell in den Innenecken  $rh \in \gamma_h^-$ , in denen für jeweils drei Punkte aus der Fünf-Punkte-Stern-Umgebung  $rh \in \gamma_h^-$  und für zwei Punkte  $rh \in G_h$  gilt.

**Satz 2.2:** ( 1. Greensche Formel )

Für zwei beliebige Gitterfunktionen  $w_h$  und  $u_h$  gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{m \in M} w_h(mh) \Delta_h u_h(mh) h^2 \\
= & - \sum_{m \in M} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{w_h(mh) - w_h((m + k_i)h)}{h} \right) \left( \frac{u_h(mh) - u_h((m + k_i)h)}{h} \right) h^2 \\
& + \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} w_h(rh) \left( \frac{u_h(rh) - u_h((r + k)h)}{h} \right) h \\
& - \sum_{i=1}^2 \sum_{r \in \gamma_i^-} \left( \frac{w_h(rh) - w_h((r + k_i)h)}{h} \right) \left( \frac{u_h(rh) - u_h((r + k_i)h)}{h} \right) h^2 .
\end{aligned}$$

Während beim ersten Summanden auf der rechten Seite die Differenzenquotienten der Funktionen  $w_h$  und  $u_h$  die entsprechenden Gradienten in der klassischen ersten Greenschen Formel approximieren, kann der zweite Term als Analogon des Integrals über den Rand aufgefaßt werden. Der letzte Ausdruck ist ein besonderes Merkmal der diskreten Theorie. Er verschwindet für  $h \rightarrow 0$ , wenn  $w_h$  und  $u_h$  Einschränkungen hinreichend glatter Funktionen auf das Gitter sind.

**Beweis:** Aus der Substitution  $m_1 = m + k_3$  und  $m_2 = m + k_4$  folgt

$$\begin{aligned}
& \sum_{m \in M} w_h(mh) \Delta_h u_h(mh) h^2 = - \sum_{m \in M} w_h(mh) \left( \sum_{i=1}^4 (u_h(mh) - u_h((m + k_i)h)) \right) \\
= & - \sum_{m \in M} w_h(mh) \left( \sum_{i=1}^2 (u_h(mh) - u_h((m + k_i)h)) \right) \\
& - \sum_{i=1}^2 \sum_{m_i \in M} w_h((m_i + k_i)h) (u_h((m_i + k_i)h) - u_h(m_i h)) \\
& - \sum_{i=1}^2 \sum_{r \in \gamma_i^-} w_h((r + k_i)h) (u_h((r + k_i)h) - u_h(rh)) \\
& + \sum_{i=3}^4 \sum_{r \in \gamma_i^-} w_h(rh) (u_h(rh) - u_h((r + k_i)h)) \\
= & - \sum_{m \in M} \sum_{i=1}^2 (w_h(mh) - w_h((m + k_i)h)) (u_h(mh) - u_h((m + k_i)h)) \\
& + \sum_{i=1}^4 \sum_{r \in \gamma_i^-} w_h(rh) (u_h(rh) - u_h((r + k_i)h)) \\
& - \sum_{i=1}^2 \sum_{r \in \gamma_i^-} (w_h(rh) - w_h((r + k_i)h)) (u_h(rh) - u_h((r + k_i)h)) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Die zweite diskrete Greensche Formel kann als Verallgemeinerung von Lemma 2.1 und Satz 2.1 aufgefaßt werden.

**Satz 2.3:** ( 2. Greensche Formel )

*Es seien  $w_h$  und  $u_h$  zwei beliebige Gitterfunktionen. Bezeichnet man die Werte der Funktion  $u_h$  auf dem Rand  $\gamma_h^-$  mit  $u_R(rh)$  und die Normalableitungen mit  $u_A(rh)$ , dann gilt in jedem beliebigen Punkt  $lh \in \mathbb{R}_h^2$*

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in M} \left( w_h(lh - mh) \Delta_h u_h(mh) - u_h(mh) \Delta_h w_h(lh - mh) \right) h^2 \\ &= \sum_{r \in \gamma^-} \left( u_A(rh) w_h(lh - rh) - h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_r} (w_h(lh - rh) - w_h(lh - (r + k)h)) u_R(rh) \right) h. \end{aligned}$$

**Beweis:** In Analogie zur Summendarstellung in Lemma 2.1 ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in M} w_h(lh - mh) \Delta_h u_h(mh) h^2 \\ &= \sum_{n \in N} u_h(nh) \Delta_h w_h(lh - nh) h^2 + \sum_{r \in \gamma} \left( \sum_{k \in K_r} w_h(lh - (r + k)h) a_k h^2 \right) u_h(rh). \end{aligned}$$

Der Beweisidee von Satz 2.1 folgend erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} & \sum_{r \in \gamma} \left( \sum_{k \in K_r} w_h(lh - (r + k)h) a_k h^2 \right) u_h(rh) + \sum_{r \in \gamma^-} u_h(rh) \Delta_h w_h(lh - rh) h^2 \\ &= \sum_{r \in \gamma^-} \left( u_A(rh) w_h(lh - rh) - h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_r} (w_h(lh - rh) - w_h(lh - (r + k)h)) u_R(rh) \right) h. \end{aligned}$$

Aus der Verknüpfung der beiden Beziehungen resultiert unmittelbar die Behauptung des Satzes ■

**Folgerung 2.1:** ( Gaußsche Summenformel )

Betrachtet man den Spezialfall  $u_h = 1$  und  $w_h = E_h$  der zweiten Greenschen Formel mit  $-\Delta_h E_h(x) = \delta_h(x)$ , dann erhält man für das Potential der Doppelschicht mit der Dichte  $u_h(rh) = u_R(rh) \equiv 1$  die Darstellung

$$(P_h^D)(lh) = \begin{cases} \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r + k)h)) & = -1, & l \in M \\ \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r + k)h)) - 1 & = -1, & l \in \gamma^- \\ \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r + k)h)) & = 0, & l \notin N. \end{cases}$$

## 2.1.2 Grundlagen für die Bearbeitung äußerer Probleme

Die klassische Potentialtheorie zeigt, daß insbesondere auch Außenraumaufgaben mit Hilfe von Integralgleichungen auf dem endlichen Rand gelöst werden können. Um auch äußere Differenzenrandwertprobleme bearbeiten zu können, werden zunächst einige der für beschränkte, einfach zusammenhängende Gebiete bewiesenen Aussagen für Ringgebiete formuliert. Dabei wird die Symbolik aus dem Abschnitt 2.1.1 bis auf die folgenden Veränderungen übernommen: Es sei  $G$  ein Ringgebiet mit den stückweise glatten Rändern  $\Gamma_R$  und  $\Gamma_a$ , wobei der äußere Rand mit  $\Gamma_R$  und der innere Rand mit  $\Gamma_a$  bezeichnet wird. Weiterhin sei  $G_h$  das entsprechende diskrete Gebiet mit den doppelten Randschichten  $\gamma_h^R = \gamma_h^{R-} \cup \gamma_h^{R+}$  und  $\gamma_h^a = \gamma_h^{a-} \cup \gamma_h^{a+}$ . In diesem Fall gehören die Punkte  $rh \in \gamma_h^{R-}$  bzw.  $rh \in \gamma_h^a$  mit  $k = (0, 0) \in K_r$  zur Randschicht  $\gamma_h^{R-}$  bzw.  $\gamma_h^{a-}$ . Zur Charakterisierung der Gitterpunkte ohne die Schrittweite  $h$  werden die Bezeichnungen  $\gamma^R$ ,  $\gamma^{R-}$  und  $\gamma^{R+}$  sowie  $\gamma^a$ ,  $\gamma^{a-}$  und  $\gamma^{a+}$  verwendet.

Ausgehend von Lemma 2.1 erhält man für Ringgebiete die Summendarstellung

$$\sum_{r \in (\gamma^R \cup \gamma^a)} \left( \sum_{k \in K_r} E_h(lh - (r+k)h) a_k h^2 \right) u_h(rh) + \sum_{m \in M} E_h(lh - mh) f_h(mh) h^2 = \begin{cases} u_h(lh) & l \in N \\ 0 & l \notin N. \end{cases}$$

Im weiteren sei  $\gamma_h^{Ra-} = (\gamma_h^{R-} \cup \gamma_h^{a-})$  und  $\gamma^{Ra-} = (\gamma^{R-} \cup \gamma^{a-})$ . Bezeichnet man in den Punkten  $rh \in \gamma_h^{Ra-}$  die Randwerte mit  $u_R(rh) = u_h(rh)$  und die diskreten Normalableitungen mit  $u_A(rh) = h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_r} (u_h(rh) - u_h((r+k)h))$ , dann gilt für alle Gitterpunkte  $lh$  mit  $l \in N = (M \cup \gamma^{Ra-})$

$$(P_h^R u_h)(lh) = \sum_{r \in (\gamma^R \cup \gamma^a)} \left( \sum_{k \in K_r} E_h(lh - (r+k)h) a_k h^2 \right) u_h(rh) = (P_h^{E_R} u_A)(lh) - (P_h^{D_R} u_R)(lh)$$

mit den für Ringgebiete typischen Potentialen

$$(P_h^{E_R} u_A)(lh) := \sum_{r \in \gamma^{Ra-}} u_A(rh) E_h(lh - rh) h \quad \text{und} \\ (P_h^{D_R} u_R)(lh) := \begin{cases} \sum_{r \in \gamma^{Ra-}} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r+k)h)) u_R(rh) & l \in M \\ \sum_{r \in \gamma^{Ra-}} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r+k)h)) u_R(rh) - u_R(lh) & l \in \gamma^{Ra-} \end{cases}$$

Zur Formulierung der ersten Greenschen Formel im Ringgebiet werden die äußeren Randschichten  $\gamma_h^{R-}$  und  $\gamma_h^{a-}$  in die Teilränder  $\gamma_{hi}^{R-} = \{rh : r \in \gamma^{R-} \text{ und } r+k_i \in M\}$  und  $\gamma_{hi}^{a-} = \{rh : r \in \gamma^{a-} \text{ und } r+k_i \in M\}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  zerlegt. Dabei sei  $k_1 = (-1, 0)$ ,  $k_2 = (0, -1)$ ,  $k_3 = (1, 0)$  und  $k_4 = (0, 1)$ . Neben der bisher eingeführten Schreibweise  $\gamma_{hi}^{Ra-} = (\gamma_{hi}^{R-} \cup \gamma_{hi}^{a-})$  wird die Symbolik  $\gamma_i^{Ra-} = (\gamma_i^{R-} \cup \gamma_i^{a-})$  mit  $\gamma_i^{R-} = \{r \in \gamma^{R-} : r+k_i \in M\}$  und  $\gamma_i^{a-} = \{r \in \gamma^{a-} : r+k_i \in M\}$  verwendet.

**Satz 2.4:** ( 1. Greensche Formel im Ringgebiet )

Für zwei beliebige Gitterfunktionen  $w_h$  und  $u_h$  gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{m \in M} w_h(mh) \Delta_h u_h(mh) h^2 \\
= & - \sum_{m \in M} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{w_h(mh) - w_h((m + k_i)h)}{h} \right) \left( \frac{u_h(mh) - u_h((m + k_i)h)}{h} \right) h^2 \\
& + \sum_{r \in \gamma^{Ra-}} \sum_{k \in K \setminus K_r} w_h(rh) \left( \frac{u_h(rh) - u_h((r + k)h)}{h} \right) h \\
& - \sum_{i=1}^2 \sum_{r \in \gamma_i^{Ra-}} \left( \frac{w_h(rh) - w_h((r + k_i)h)}{h} \right) \left( \frac{u_h(rh) - u_h((r + k_i)h)}{h} \right) h^2.
\end{aligned}$$

Diese Formel kann in Analogie zur Vorgehensweise beim Satz 2.2 bewiesen werden. Der folgende Satz zeigt, daß auch die Übertragung von Satz 2.3 auf Ringgebiete möglich ist.

**Satz 2.5:** ( 2. Greensche Formel im Ringgebiet )

Es seien  $w_h$  und  $u_h$  zwei beliebige Gitterfunktionen, wobei die Randwerte von  $u_h$  auf  $\gamma_h^{Ra-}$  mit  $u_R(rh)$  und die diskreten Normalableitungen mit  $u_A(rh)$  bezeichnet werden. Für jeden beliebigen Gitterpunkt  $lh \in \mathbb{R}_h^2$  gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{m \in M} \left( w_h(lh - mh) \Delta_h u_h(mh) - u_h(mh) \Delta_h w_h(lh - mh) \right) h^2 \\
= & \sum_{r \in \gamma^{Ra-}} \left( u_A(rh) w_h(lh - rh) - h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_r} (w_h(lh - rh) - w_h(lh - (r + k)h)) u_R(rh) \right) h.
\end{aligned}$$

Neben dem Ringgebiet  $G_h$  mit den beiden doppelten Randschichten  $\gamma_h^R$  und  $\gamma_h^a$  wird zusätzlich das zu einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G^1$  gehörende diskrete Gebiet  $G_h^1$  mit genau der gleichen doppelten Randschicht  $\gamma_h^R$  betrachtet. Dabei sei  $M^1 = \{(m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, (m_1 h, m_2 h) \in (G^1 \cap \mathbb{R}_h^2)\}$ . Mit Hilfe von Satz 2.5 kann das folgende Lemma bewiesen werden:

**Lemma 2.3:** Es gilt

$$\sum_{r \in \gamma^{a-}} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r + k)h)) = \begin{cases} 0 & lh \in G_h \cup \gamma_h^{R-} \\ 0 & lh \notin G_h^1 \\ 1 & lh \in \gamma_h^{a-} \cup (G_h^1 \setminus G_h). \end{cases}$$

**Beweis:** Die zweite Greensche Formel im Ringgebiet hat im Spezialfall  $u_h = 1$  und  $w_h = E_h$  mit  $-\Delta_h E_h(x) = \delta_h(x)$  die Gestalt

$$\sum_{r \in (\gamma^{R-} \cup \gamma^{a-})} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r + k)h)) = \sum_{m \in M} \Delta_h E_h(lh - mh) h^2.$$

Andererseits resultiert aus Satz 2.3 die Beziehung

$$\sum_{r \in \gamma^{R-}} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r + k)h)) = \sum_{m^1 \in M^1} \Delta_h E_h(lh - m^1 h) h^2.$$

Die Auswertung der beiden rechten Seiten führt auf die Behauptung des Satzes  $\blacksquare$

Die Untersuchungen für Ringgebiete bilden die Grundlage für den Beweis der entsprechenden Aussagen in Außengebieten. Dabei sei  $G_h^a$  das zum Außengebiet  $G^a$  gehörende diskrete Gebiet mit der doppelten Randschicht  $\gamma_h^a = \gamma_h^{a-} \cup \gamma_h^{a+}$ . Ohne die Schrittweite  $h$  wird die Symbolik  $\gamma^a$  bzw.  $\gamma^{a-}$  und  $\gamma^{a+}$  verwendet. In Analogie zum Abschnitt 2.1.1 sei  $M^a = \{m = (m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, (m_1 h, m_2 h) \in (G^a \cap \mathbb{R}_h^2)\}$ ,  $K_r^a = \{k \in K : r + k \notin M^a\}$ ,  $N_m = \{m + k : k \in K\}$ ,  $N^a = \bigcup_{m \in M^a} N_m$  und  $\gamma_h^a = \{rh : r \in N^a \text{ und } K_r^a \neq \emptyset\}$ . Definiert man in den Randpunkten  $rh \in \gamma_h^{a-}$  die Werte mit  $u_R(rh) = u_h(rh)$  und die diskreten Normalableitungen mit  $u_A(rh) = h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_r^a} (u_h(rh) - u_h((r + k)h))$ , dann hat das Einfachschichtpotential die Gestalt

$$(P_h^{E_a} u_A)(lh) := \sum_{r \in \gamma^{a-}} u_A(rh) E_h(lh - rh) h$$

und für das Potential der Doppelschicht gilt

$$(P_h^{D_a} u_R)(lh) := \begin{cases} \sum_{r \in \gamma^{a-}} \sum_{k \in K \setminus K_r^a} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r + k)h)) u_R(rh) & l \in M^a \\ \sum_{r \in \gamma^{a-}} \sum_{k \in K \setminus K_r^a} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r + k)h)) u_R(rh) - u_R(lh) & l \in \gamma^{a-}. \end{cases}$$

Das Doppelschichtpotential mit der Dichte  $u_h(rh) = u_R(rh) \equiv 1$  wurde bereits im Lemma 2.3 untersucht. Der Vergleich mit der Gaußschen Summenformel aus dem Abschnitt 2.1.1 zeigt, daß ein Unterschied zwischen dem diskreten Rand eines Innen- und Außengebietes besteht, bedingt durch die Innen- und Außenecken. Auf diese Feinheit ist ganz besonders bei der Kopplung von Innen- und Außengebieten zu achten.

Im zweidimensionalen Fall nennt man eine Funktion  $u_h(mh)$  *diskret harmonisch im Außengebiet*, wenn sie in allen Punkten  $mh \in G_h^a$  die Differenzengleichung  $-\Delta_h u_h(mh) = 0$  erfüllt und zusätzlich  $|u_h(mh)| \leq C$  für  $|mh| \rightarrow \infty$  gilt. Dabei ist  $C < \infty$  eine beliebig große Konstante.

**Lemma 2.4:** *Im ebenen Außengebiet ist das Einfachschichtpotential im allgemeinen keine diskret harmonische Funktion.*

**Beweis:** Im Kern des Potentials der Einfachschicht steht die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte diskrete Fundamentallösung  $E_h(x)$  des Laplaceoperators. Die Konvergenzuntersuchungen im Abschnitt 1.2.1 verdeutlichen das logarithmische Verhalten dieser Fundamentallösung für  $|x| \rightarrow \infty$ . Daher findet man für alle  $rh \in \gamma_h^{a-}$

leicht eine Dichte  $u_A(rh)$ , so daß bei beliebiger Wahl der Konstante  $C$  in den Gitterpunkten  $lh$  mit  $|lh| \rightarrow \infty$  die Ungleichung  $|(P_h^{E_a} u_A)(lh)| > C$  erfüllt ist. Ein spezieller Vertreter ist die Funktion  $u_A(rh)$ , die in genau einem Punkt  $rh \in \gamma_h^a -$  den Wert 1 annimmt und in den übrigen Randpunkten identisch Null ist. Auf diese Weise wird ein Widerspruch zur Definition einer diskret harmonischen Funktion im ebenen Außengebiet erzielt ■

**Lemma 2.5:** *Nimmt die Dichte  $u_R(rh)$  des Potentials der Doppelschicht auf  $\gamma_h^a -$  nur endliche Werte an, dann ist dieses Potential eine im ebenen Außengebiet  $G_h^a$  diskret harmonische Funktion.*

**Beweis:** In Analogie zu Lemma 2.2 kann man zeigen, daß in allen Gitterpunkten  $mh \in G_h^a$  die diskrete Laplacegleichung erfüllt ist. Darüber hinaus ist die Eigenschaft  $|(P_h^{D_a} u_R)(mh)| \leq C$  für  $|mh| \rightarrow \infty$  zu überprüfen. Ausgangspunkt dafür ist die Ungleichung

$$|(P_h^{D_a} u_R)(mh)| \leq \max_{r \in \gamma_h^a -} |u_R(rh)| \sum_{r \in \gamma_h^a -} |h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_r^a} (E_h(mh - rh) - E_h(mh - (r+k)h))| h.$$

Für die Differenzenableitung der diskreten Fundamentallösung des Laplaceoperators gilt nach einem von THOMÉE in der Arbeit [Th1] bewiesenen Theorem

$$|h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_r^a} (E_h(mh - rh) - E_h(mh - (r+k)h))| \leq C_1 (|mh - rh| + h)^{-1},$$

wobei die Konstante  $C_1$  von  $h$  unabhängig ist. Da der Rand  $\gamma_h^a -$  nur aus endlich vielen Gitterpunkten besteht, erhält man in jedem beliebigen Punkt  $m \in M^a$  die Abschätzung

$$|(P_h^{D_a} u_R)(mh)| \leq C_1 \max_{r \in \gamma_h^a -} |u_R(rh)| \max_{r \in \gamma_h^a -} (|mh - rh| + h)^{-1} \sum_{r \in \gamma_h^a -} h \leq C \quad \blacksquare$$

Das folgende Lemma beschreibt das Verhalten der Differenzenableitung der im ebenen Außengebiet diskret harmonischen Funktionen. Diese Eigenschaft ist vor allem für den Beweis der ersten Greenschen Formel im Außengebiet von Bedeutung. Im kontinuierlichen Fall beweist man die analoge Aussage mit Hilfe der Kelvintransformation (nachzulesen bei WLADIMIROW [Wla]) oder auf funktionentheoretischem Weg mittels Potenz- und Laurentreihen (nach der Vorgehensweise von SMIRNOW [SM1]). Die Kelvintransformation ist zur Übertragung ins Diskrete ungeeignet, da das Verhalten der Differenzenableitung speziell auf dem Gitter  $\mathbb{R}_h^2$  untersucht werden soll. Auch die zweite Methode führt nach dem bisherigen Erkenntnisstand nicht zum Ziel, so daß eine völlig neue Beweisidee notwendig ist. Der entsprechende Beweis wird im folgenden vorgestellt.

**Lemma 2.6:** *Die Differenzenableitung erster Ordnung der im ebenen Außengebiet diskret harmonischen Funktionen  $u_h(mh)$  fällt im Unendlichen wie  $1/|mh|^2$ .*

**Beweis:** Die im ebenen Außengebiet diskret harmonische Funktion soll durch Null zu einer auf dem ganzen Gitter  $\mathbb{R}_h^2$  definierten Funktion  $u_h(mh)$  fortgesetzt werden. Betrachtet man die Gleichung  $-\Delta_h u_h(mh) = f_h(mh)$ , dann kann  $f_h(mh)$  nur in den Punkten  $m \in M^* = \{m : m \in \bigcup_{r \in \gamma^a} N_r \text{ und } m \notin M^a\}$  von Null verschieden sein.

Ferner gilt  $|f_h(mh)| < \infty$ , da nur Gitterfunktionen betrachtet werden, die endliche Werte annehmen. Neben der Funktion  $u_h(mh)$  genügt auch die Gitterfunktion

$$w_h(mh) = h \sum_{l \in M^*} E_h(mh - lh) f_h(lh) h$$

der Gleichung  $-\Delta_h w_h(mh) = f_h(mh)$ . Auf Grund des Verhaltens der diskreten Fundamentallösung in der Ebene wächst die Funktion  $w_h(mh)$  für  $|mh| \rightarrow \infty$  logarithmisch. Andererseits gilt  $|u_h(mh)| \leq C$  für  $|mh| \rightarrow \infty$ , so daß die Funktion  $v_h(mh) = u_h(mh) - w_h(mh)$  in der ganzen Ebene harmonisch ist und im Unendlichen nicht schneller als  $|mh|$  wächst. Aus dem von Sobolev in [So1] bewiesenen Satz folgt  $v_h(mh) = C_1$  in allen Gitterpunkten  $mh \in \mathbb{R}_h^2$  und somit  $u_h(mh) = C_1 + w_h(mh)$ . Schreibt man darüber hinaus die beschränkte Funktion  $u_h(mh)$  in der Form

$$u_h(mh) = C_1 + h \sum_{l \in M^*} (E_h(mh - lh) - E_h(mh)) f_h(lh) h + h E_h(mh) \sum_{l \in M^*} f_h(lh) h,$$

dann muß bedingt durch das logarithmische Verhalten der diskreten Fundamentallösung  $E_h(mh)$  die Gleichung  $\sum_{l \in M^*} f_h(lh) h = 0$  erfüllt sein. Im folgenden soll  $u_h(mh)$  nur im Außengebiet betrachtet werden. Die bisher gewonnene Darstellung dieser im ebenen Außengebiet diskret harmonischen Funktion ermöglicht die gezielte Untersuchung der Differenzenableitung erster Ordnung. Betrachtet man beispielsweise die Vorwärtsableitung nach der ersten Koordinate, dann erhält man zunächst mit Hilfe der Substitution  $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2) = (h \xi_1, h \xi_2)$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & |h^{-1}(u_h((m_1 + 1)h, m_2h) - u_h(m_1h, m_2h))| \\ & \leq \max_{l \in M^*} |f_h(lh)| \sum_{l \in M^*} \left| \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{(e^{-i\xi_1 h} - 1)(e^{il\xi h} - 1)}{\frac{4}{h^2}(\sin^2 \frac{h\xi_1}{2} + \sin^2 \frac{h\xi_2}{2})} e^{-im\xi h} d\xi_1 d\xi_2 \right| h \\ & = \max_{l \in M^*} |f_h(lh)| h^2 \sum_{l \in M^*} \frac{1}{h^2} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(e^{-i\Theta_1} - 1)(e^{il\Theta} - 1)}{4(\sin^2 \frac{\Theta_1}{2} + \sin^2 \frac{\Theta_2}{2})} e^{-im\Theta} d\Theta_1 d\Theta_2 \right| h \end{aligned}$$

mit  $l\Theta = l_1\Theta_1 + l_2\Theta_2$  und  $m\Theta = m_1\Theta_1 + m_2\Theta_2$ . Der Ausdruck

$$T(\Theta_1, \Theta_2) = \frac{(e^{-i\Theta_1} - 1)(e^{il\Theta} - 1)}{4(\sin^2 \frac{\Theta_1}{2} + \sin^2 \frac{\Theta_2}{2})}$$

kann in der Form  $\frac{T_1(\Theta_1, \Theta_2)}{T_2(\Theta_1, \Theta_2)}$  geschrieben werden, wobei  $T_1$  und  $T_2$  trigonometrische Polynome sind. Für das erste Polynom gilt  $T_1(\Theta_1, \Theta_2) = \sum_{\mu} t_{\mu} e^{i\mu\Theta}$  mit  $t_{\mu} \in \{-1, 1\}$



für  $\mu \in Y_l = \{(0,0), (-1,0), (l_1-1, l_2), (l_1, l_2)\}$  und  $t_\mu = 0$  für  $\mu \notin Y_l$ . Mittels Taylorentwicklung erhält man  $T_1(\Theta_1, \Theta_2) = P_1(\Theta_1, \Theta_2) + o(|\Theta|^2)$  für  $\Theta \rightarrow 0$  mit  $P_1(\Theta_1, \Theta_2) = l_1\Theta_1^2 + l_2\Theta_1\Theta_2$ . Folglich ist  $P_1(\Theta_1, \Theta_2)$  ein Polynom vom Grad  $p_1 = 2$ . Ist  $N_1$  die kleinste natürliche Zahl, welche die Ungleichungen  $|\mu| < N_1$  für alle  $\mu \in \bigcup_{l \in M^*} Y_l$  und  $N_1 \geq 4$  erfüllt, dann gilt ferner  $|t_\mu| \leq N_1$  und  $t_\mu = 0$  für  $|\mu| > N_1$ .

Das zweite trigonometrische Polynom kann in der Form  $T_2(\Theta_1, \Theta_2) = \sum_{\nu} t_\nu e^{i\nu\Theta}$  mit  $t_\nu \in \{4, -1\}$  für  $\nu \in K = \{(0,0), (1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$  und  $t_\nu = 0$  für  $\nu \notin K$  geschrieben werden. Durch Taylorentwicklung gelangt man zur Darstellung  $T_2(\Theta_1, \Theta_2) = P_2(\Theta_1, \Theta_2) + o(|\Theta|^2)$  für  $\Theta \rightarrow 0$ . Auch in diesem Fall ist das Polynom  $P_2(\Theta_1, \Theta_2) = \Theta_1^2 + \Theta_2^2$  vom Grad  $p_2 = 2$ . Außerdem kann man die Beziehungen  $|T_2(\Theta_1, \Theta_2)| \geq \frac{4}{\pi^2}|\Theta|^2 > \frac{1}{4}|\Theta|^2 \geq \frac{1}{N_1}|\Theta|^2$ ,  $|t_\nu| \leq N_1$  und  $t_\nu = 0$  für  $|\nu| > N_1$  beweisen. Da die Polynome  $P_1$  und  $P_2$  den Grad 2 haben und alle Voraussetzungen des von THOMÉE in der Arbeit [Th1] bewiesenen Lemma 3.4 erfüllt sind, gilt

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\Theta_1, \Theta_2) e^{-im\Theta} d\Theta_1 d\Theta_2 \right| \leq C_2 \frac{1}{(|m|+1)^\alpha} \quad \text{mit } \alpha = 2 + p_1 - p_2 = 2.$$

Bei der weiteren Abschätzung von  $|h^{-1}(u_h((m_1+1)h, m_2h) - u_h(m_1h, m_2h))|$  ist zu beachten, daß die Menge  $M^*$  nur aus endlich vielen Punkten besteht und die Schrittweite  $h$  hier als konstant betrachtet wird. Der Beweis kann analog geführt werden, wenn eine andere Differenzenableitung erster Ordnung betrachtet wird ■

Die Grundlagen zum Beweis der ersten Greenschen Formel für diskret harmonische Funktionen im ebenen Außengebiet sind damit geschaffen.

**Satz 2.6:** ( 1. Greensche Formel im Außengebiet )

*Es seien  $w_h$  und  $u_h$  zwei diskret harmonische Funktionen im ebenen Außengebiet  $G_h^a$  mit der doppelten diskreten Randschicht  $\gamma_h^a = \gamma_h^{a-} \cup \gamma_h^{a+}$ . Die äußere Randschicht  $\gamma_h^{a-}$  wird in die Teilränder  $\gamma_{hi}^{a-} = \{rh \in \gamma_h^{a-} : r + k_i \in M^a\}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  mit  $k_1 = (-1,0)$ ,  $k_2 = (0,-1)$ ,  $k_3 = (1,0)$  und  $k_4 = (0,1)$  zerlegt. Unter Verwendung der Bezeichnung  $\gamma_i^{a-} = \{r \in \gamma^{a-} : r + k_i \in M^a\}$  gilt*

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in M^a} w_h(mh) \Delta_h u_h(mh) h^2 \\ = & - \sum_{m \in M^a} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{w_h(mh) - w_h((m+k_i)h)}{h} \right) \left( \frac{u_h(mh) - u_h((m+k_i)h)}{h} \right) h^2 \\ & + \sum_{r \in \gamma^{a-}} \sum_{k \in K \setminus K_r^a} w_h(rh) \left( \frac{u_h(rh) - u_h((r+k)h)}{h} \right) h \\ & - \sum_{i=1}^2 \sum_{r \in \gamma_i^{a-}} \left( \frac{w_h(rh) - w_h((r+k_i)h)}{h} \right) \left( \frac{u_h(rh) - u_h((r+k_i)h)}{h} \right) h^2. \end{aligned}$$

**Beweis:** Neben dem Außengebiet  $G_h^a$  wird ein hinreichend großes Gebiet  $G^R$  betrachtet, dessen Rand  $\Gamma^R$  ein Quadrat mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und der Seitenlänge  $L = 2Rh$ ,  $R \in \mathbb{N}$  ist. Dabei sollen alle Gitterpunkte  $mh \in \mathbb{R}_h^2 \setminus G_h^a$  zur Menge  $G^R \cap \mathbb{R}_h^2$  gehören und zum Rand  $\Gamma^R$  einen Abstand von mindestens  $3h$  haben. Ferner sei  $M^R = \{m = (m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, (m_1h, m_2h) \in (G^R \cap \mathbb{R}_h^2)\}$ . Bildet man den Durchschnitt von  $G^R \cap \mathbb{R}_h^2$  und  $G_h^a$ , dann entsteht innerhalb des Außengebietes  $G_h^a$  ein diskretes Ringgebiet mit den Rändern  $\gamma_h^a$  und  $\gamma_h^R$ . Zu diesem Ringgebiet gehören alle inneren Gitterpunkte  $mh : m \in M = M^a \cap M^R$ . Die Behauptung des Satzes folgt aus Satz 2.4, wenn beim Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  die Summe

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r \in \gamma^{R-}} \sum_{k \in K \setminus K_r} w_h(rh) \left( \frac{u_h(rh) - u_h((r+k)h)}{h} \right) h \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \sum_{r \in \gamma_i^{R-}} \left( \frac{w_h(rh) - w_h((r+k_i)h)}{h} \right) \left( \frac{u_h(rh) - u_h((r+k_i)h)}{h} \right) h^2 \end{aligned}$$

verschwindet. Da  $w_h$  und  $u_h$  diskret harmonische Funktionen sind, erhält man mit Hilfe von Lemma 2.6 die Abschätzung

$$\begin{aligned} |S| &\leq \sum_{r \in \gamma^{R-}} \frac{C_1}{|rh|^2} h + \sum_{i=1}^2 \sum_{r \in \gamma_i^{R-}} \frac{C_2}{|rh|^4} h^2 \\ &\leq \frac{C_1}{(Rh)^2} \sum_{r \in \gamma^{R-}} h + \frac{C_2}{(Rh)^4} \sum_{i=1}^2 \sum_{r \in \gamma_i^{R-}} h^2 \leq \frac{C_1}{(Rh)^2} + \frac{C_2}{(Rh)^4}. \end{aligned}$$

Für jede fest gewählte Schrittweite  $h$  gilt daher  $|S| \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$  ■

## 2.2 Eindeutigkeitssätze

In Analogie zur klassischen Potentialtheorie können Eindeutigkeitssätze für diskrete Dirichlet- und Neumannprobleme in Innen- und Außengebieten mit Hilfe der ersten Greenschen Formel bewiesen werden. Eine weitere Beweisidee, die im engen Zusammenhang mit den Überlegungen in Lemma 2.6 steht, soll anhand des äußeren Dirichletproblems vorgestellt werden.

**Satz 2.7:** (Eindeutigkeitssatz für das innere Dirichletproblem)

*Das Differenzenrandwertproblem*

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h \\ u_h(rh) &= \varphi_h(rh) & \forall rh \in \gamma_h^- \end{aligned} \quad (\mathbf{Di})$$

besitzt für beliebige Randwerte  $\varphi_h(rh)$  eine eindeutig bestimmte Lösung.

**Beweis:** Existieren zwei Lösungen  $u_h^1$  und  $u_h^2$  des Problems  $(D_i)$ , dann ist die Differenz  $u_h^* = u_h^1 - u_h^2$  eine Lösung des entsprechenden homogenen Problems. Ausgehend von der im Satz 2.2 bewiesenen ersten Greenschen Formel erhält man für  $u_h^* = w_h = u_h$  die Gleichung

$$0 = - \sum_{m \in M} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{u_h^*(mh) - u_h^*((m+k_i)h)}{h} \right)^2 h^2 - \sum_{i=1}^2 \sum_{r \in \gamma_i^-} \left( \frac{u_h^*((r+k_i)h)}{h} \right)^2 h^2.$$

Da alle auf der rechten Seite vorkommenden Summanden das gleiche Vorzeichen haben, muß  $u_h^*((r+k_i)h) = 0$  für alle  $r \in \gamma_i^-$  und  $i = 1, 2$  gelten. Darüber hinaus kann man mit Hilfe der Beziehung  $u_h^*(mh) = u_h^*((m+k_i)h)$  für  $m \in M$  und  $i = 1, 2$  zeigen, daß die Funktion  $u_h^*(nh)$  in allen Gitterpunkten  $nh \in G_h \cup \gamma_h^-$  den Wert 0 annimmt. Folglich gilt  $u_h^1 = u_h^2$  ■

Von SAMARSKIJ wird dieser Eindeutigkeitssatz mit dem Maximumprinzip bewiesen. Der hier vorgestellte Beweis mit Hilfe der ersten Greenschen Formel kann auch bei Problemen geführt werden, bei denen das Maximumprinzip nicht gilt. Hauptsächlich soll jedoch an dieser Stelle gezeigt werden, daß ein Beweis des Eindeutigkeitssatzes mit den Mitteln möglich ist, die im Rahmen der bisher aufgebauten Theorie vorhanden sind. Auch von SAMARSKIJ werden diskrete Greensche Formeln hergeleitet, die aber nur in Rechteckgebieten gültig sind. Als Erweiterung dessen werden in der vorliegenden Arbeit aus Rechtecken zusammengesetzte Gebiete betrachtet, die in vielen Fällen das kontinuierliche Ausgangsgebiet besser approximieren. Obwohl die Idee zum Aufbau der diskreten Theorie hauptsächlich von RYABENKIJ übernommen wird, leitet er die im Abschnitt 2.1.1 bewiesenen diskreten Greenschen Formeln nicht her, so daß die entscheidende Grundlage für den hier vorgestellten Beweis des Eindeutigkeitssatzes fehlt. Da speziell die zweite Greensche Formel sehr eng mit dem Problem der Aufspaltung des Differenzenpotentials in ein diskretes Einfach- und Doppelschichtpotential verbunden ist, wird deutlich, warum sich RYABENKIJ nicht mit diskreten Greenschen Formeln befaßt.

**Satz 2.8:** ( Eindeutigkeitssatz für das innere Neumannproblem )

Zwei beliebige Lösungen  $u_h^1$  und  $u_h^2$  des inneren Neumannproblems

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h \\ \sum_{k \in K \setminus K_r} \frac{(u_h(rh) - u_h((r+k)h))}{h} &= \psi_h(rh) & \forall rh \in \gamma_h^- \end{aligned} \quad (\mathbf{N_i})$$

mit den diskreten Normalableitungen  $\psi_h(rh)$  können sich nur um eine Konstante unterscheiden.

**Beweis:** Die Differenz  $u_h^* = u_h^1 - u_h^2$  ist eine Lösung des homogenen Problems  $(N_i)$ . Aus der ersten Greenschen Formel folgt für  $u_h^* = w_h = u_h$

$$0 = - \sum_{m \in M} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{u_h^*(mh) - u_h^*((m+k_i)h)}{h} \right)^2 h^2 - \sum_{i=1}^2 \sum_{r \in \gamma_i^-} \left( \frac{u_h^*(rh) - u_h^*((r+k_i)h)}{h} \right)^2 h^2,$$

wobei alle auf der rechten Seite stehenden Summanden das gleiche Vorzeichen haben. Aus diesem Grund gilt  $u_h^*(mh) = u_h^*((m + k_i)h)$  sowie  $u_h^*(rh) = u_h^*((r + k_i)h)$  für  $m \in M$ ,  $i = 1, 2$  und  $r \in \gamma_i^-$ . Ausgehend von diesen Gleichungen und der Randbedingung erhält man in allen Gitterpunkten  $nh \in G_h \cup \gamma_h^-$  die Beziehung  $u_h^*(nh) = u_h^1(nh) - u_h^2(nh) = C$ . Dabei ist  $C < \infty$  eine beliebige Konstante ■

Neben diesem Eindeutigkeitssatz kann mit Hilfe der ersten Greenschen Formel auch eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des inneren Neumannproblems formuliert werden.

**Lemma 2.7:** *Notwendig für die Lösbarkeit des Problems  $(N_i)$  ist die Bedingung*

$$\sum_{r \in \gamma^-} \psi_h(rh) h = 0. \quad (2.1)$$

**Beweis:** Betrachtet man den Spezialfall  $w_h = 1$  der ersten Greenschen Formel, dann gilt für die Lösung  $u_h$  des Problems  $(N_i)$

$$0 = \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} \left( \frac{u_h(rh) - u_h((r + k)h)}{h} \right) h = \sum_{r \in \gamma^-} \psi_h(rh) h \quad \blacksquare$$

Im folgenden wird die Eindeutigkeit der Lösung bei äußeren Problemen untersucht.

**Satz 2.9:** (Eindeutigkeitssatz für das äußere Dirichletproblem)

*Das Dirichletproblem*

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h^a \\ |u_h(mh)| &\leq C & \text{für } |mh| \rightarrow \infty \\ u_h(rh) &= \varphi_h^a(rh) & \forall rh \in \gamma_h^{a-} \end{aligned} \quad (\mathbf{D}_a)$$

*ist für beliebige Randwerte  $\varphi_h^a(rh)$  eindeutig lösbar.*

**Beweis:** Sind  $u_h^1$  und  $u_h^2$  zwei Lösungen des Problems  $(D_a)$ , dann ist  $u_h^1 - u_h^2$  eine Lösung des entsprechenden homogenen Problems. Wird diese Differenz durch Null zu einer auf ganz  $\mathbb{R}_h^2$  definierten Funktion  $u_h^*$  fortgesetzt, dann erfüllt  $u_h^*$  die Gleichung  $-\Delta_h u_h^*(mh) = f_h(mh)$ . Dabei gilt zumindest in den Gitterpunkten  $mh \in \mathbb{R}_h^2 \setminus \gamma_h^{a-}$   $f_h(mh) = 0$ . Andererseits ist für einen beliebigen Punkt  $lh \in \mathbb{R}_h^2 \setminus (G_h^a \cup \gamma_h^{a-})$  auch die logarithmisch wachsende Funktion

$$w_h(mh) = h \sum_{r \in \gamma^{a-}} (E_h(mh - rh) - E_h(lh - rh)) f_h(rh) h$$

eine Lösung der Gleichung  $-\Delta_h w_h(mh) = f_h(mh)$ . Aus dem von SOBOLEV in [Sol1] bewiesenen Satz über die in der ganzen Ebene diskret harmonischen Funktionen

folgt  $v_h(mh) = u_h^*(mh) - w_h(mh) = C$  in allen Gitterpunkten  $mh \in \mathbb{R}_h^2$ . Durch die spezielle Konstruktion von  $w_h$  und die mit der Fortsetzung von  $u_h^1 - u_h^2$  durch Null verbundene Wahl von  $lh$  gilt außerdem  $v_h(lh) = 0$  und somit  $u_h^*(mh) = w_h(mh)$ . Schreibt man  $u_h^*(mh)$  in der Form

$$u_h^*(mh) = h \sum_{r \in \gamma^a -} (E_h(mh - rh) - E_h(lh - rh) - E_h(mh)) f_h(rh) h + h E_h(mh) \sum_{r \in \gamma^a -} f_h(rh) h,$$

dann kann mit Hilfe des bereits im Beweis von Lemma 2.6 genauer beschriebenen Lemmas 3.4 von THOMÉE gezeigt werden, daß der erste Summand für  $|mh| \rightarrow \infty$  gegen  $C_1 = -h \sum_{r \in \gamma^a -} E_h(lh - rh) f_h(rh) h$  strebt. Da  $u_h^*(mh)$  im Unendlichen be-

schränkt ist und die Fundamentallösung  $E_h(mh)$  logarithmisch wächst, folgt aus der zweiten Summe die Beziehung  $\sum_{r \in \gamma^a -} f_h(rh) h = 0$ . Betrachtet man zusätzlich die im

Unendlichen verschwindende diskret harmonische Funktion  $u_h^{**}(mh) = u_h^*(mh) - C_1$ , dann kann durch das quadratische Fallen der Differenzenableitung die Konvergenz der Reihe  $\sum_{m: m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{u_h^{**}(mh) - u_h^{**}((m + k_i)h)}{h} \right)^2 h^2$  mit  $k_1 = (-1, 0)$  und  $k_2 = (0, -1)$  gezeigt werden. Aus der Eigenschaft  $u_h^{**}(rh) = -C_1$  für alle  $rh \in \gamma_h^a -$  und der aus der Beziehung

$$\begin{aligned} & \sum_{m: m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{u_h^{**}(mh) - u_h^{**}((m + k_i)h)}{h} \right)^2 h^2 \\ &= - \sum_{m: m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} u_h^{**}(mh) \Delta_h u_h^{**}(mh) h^2 = \sum_{r \in \gamma^a -} u_h^{**}(rh) f_h(rh) h^2 = -C_1 \sum_{r \in \gamma^a -} f_h(rh) h^2 = 0 \end{aligned}$$

resultierenden Gleichung  $u_h^{**}(mh) = u_h^{**}((m + k_i)h) \quad \forall mh \in \mathbb{R}_h^2$  und  $i = 1, 2$  folgt  $u_h^{**}(mh) = -C_1$  in allen Gitterpunkten  $mh \in \mathbb{R}_h^2$  und somit  $u_h^*(mh) = 0$  ■

Der Beweis dieses Eindeutigkeitssatzes kann selbstverständlich auch mit Hilfe der ersten Greenschen Formel im Außengebiet geführt werden. An dieser Stelle soll nur die Vielfältigkeit der Beweismethoden gezeigt werden.

**Satz 2.10:** (Eindeutigkeitssatz für das äußere Neumannproblem)

Zwei beliebige Lösungen  $u_h^1$  und  $u_h^2$  des äußeren Neumannproblems

$$\begin{aligned} & -\Delta_h u_h(mh) = 0 \quad \forall mh \in G_h^a, \quad |u_h(mh)| \leq C \quad \text{für } |mh| \rightarrow \infty \\ & \text{und} \quad \sum_{k \in K \setminus K_r^a} \frac{(u_h(rh) - u_h((r + k)h))}{h} = \psi_h^a(rh) \quad \forall rh \in \gamma_h^a - \end{aligned} \quad (\mathbf{N}_a)$$

mit den diskreten Normalableitungen  $\psi_h^a(rh)$  können sich nur um eine Konstante unterscheiden.

**Beweis:** Die Differenz  $u_h^* = u_h^1 - u_h^2$  ist eine Lösung des homogenen äußeren Neumannproblems. Nach der ersten Greenschen Formel im Außengebiet gilt für  $u_h^* = w_h = u_h$

$$0 = - \sum_{m \in M^a} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{u_h^*(mh) - u_h^*((m+k_i)h)}{h} \right)^2 h^2 - \sum_{i=1}^2 \sum_{r \in \gamma_i^{a-}} \left( \frac{u_h^*(rh) - u_h^*((r+k_i)h)}{h} \right)^2 h^2.$$

Aus dieser Gleichung, bei der alle vorkommenden Summanden das gleiche Vorzeichen haben, und der homogenen Neumannrandbedingung folgt  $u_h^*(nh) = C$  und somit  $u_h^1(nh) = u_h^2(nh) + C \quad \forall nh \in G_h^a \cup \gamma_h^{a-}$  ■

In Analogie zum inneren Neumannproblem ist auch das äußere Problem nur unter einer Zusatzbedingung lösbar.

**Lemma 2.8:** *Notwendig für die Lösbarkeit des Problems  $(N_a)$  ist die Bedingung*

$$\sum_{r \in \gamma^{a-}} \psi_h^a(rh) h = 0. \quad (2.2)$$

**Beweis:** Betrachtet man den Spezialfall  $w_h = 1$  von Satz 2.6, dann gilt für die Lösung  $u_h$  des äußeren Neumannproblems

$$0 = \sum_{r \in \gamma^{a-}} \sum_{k \in K \setminus K_r^a} \left( \frac{u_h(rh) - u_h((r+k)h)}{h} \right) h = \sum_{r \in \gamma^{a-}} \psi_h^a(rh) h \quad \blacksquare$$

## 2.3 Potentialansätze für Randwertprobleme

Im Mittelpunkt der weiteren Untersuchungen steht die Lösung der auf der Laplacegleichung beruhenden diskreten Dirichlet- und Neumannprobleme. Speziell in diesem Abschnitt werden die Grundlagen zur numerischen Lösung der Differenzenrandwertprobleme geschaffen. Bei den einzelnen Problemen wird immer von einem Ansatz mit dem diskreten Einfachschichtpotential ausgegangen. Eine wesentliche Rolle beim Beweis der entsprechenden Sätze spielen die Eindeutigkeitssätze aus dem Abschnitt 2.2. Besonders auffallend ist die Analogie zu den klassischen Resultaten und Methoden. Aus der Vielzahl der erschienenen Arbeiten sei vor allem auf die Autoren MICHLIN [Mi], KRESS [Kr] und SMIRNOW [Sm1] verwiesen.

Im zweidimensionalen Fall ist aus der klassischen Potentialtheorie bekannt, daß bei der Lösung von Dirichletproblemen mit dem Einfachschichtpotential eine Änderung im Potentialansatz notwendig ist. Nur mit Hilfe dieser Änderung kann beispielsweise beim Einfachschichtpotential mit konstanter Dichte auf dem Einheitskreis gezeigt werden, daß die Lösung des konkret betrachteten Dirichletproblems eindeutig ist. Andererseits wird bei äußeren Dirichletproblemen erst durch die Modifikation des Potentials das tatsächliche Verhalten der Lösung im Unendlichen widergespiegelt. Auch im diskreten Fall ist sowohl bei äußeren Dirichletproblemen zur genauen Beschreibung des Verhaltens der Lösung im Unendlichen als auch bei inneren Dirichletproblemen zum Beweis von Eindeutigkeitsaussagen eine Änderung im Potentialansatz erforderlich. Die Grundidee wird aus dem im kontinuierlichen Fall gewählten Ansatz von KRESS [Kr] übernommen.

### 2.3.1 Äußeres Neumannproblem

**Satz 2.11:** Wenn die notwendige Bedingung (2.2) erfüllt ist und das System

$$\psi_h^a(lh) = \sum_{k \in K \setminus K_l^a} \sum_{r \in \gamma^{a-}} (E_h(lh - rh) - E_h((l+k)h - rh)) v_h(rh) \quad \forall lh \in \gamma_h^{a-} \quad (2.3)$$

lösbar ist, dann stellt das Potential der Einfachschicht

$$(P_h^{E_a} v_h)(mh) = \sum_{r \in \gamma^{a-}} v_h(rh) E_h(mh - rh) h$$

in allen Punkten  $mh \in G_h^a \cup \gamma_h^{a-}$  eine Lösung des äußeren Neumannproblems dar.

**Beweis:** Ist das Gleichungssystem (2.3) lösbar, dann hat die diskrete Normalableitung des Einfachschichtpotentials in jedem Gitterpunkt  $lh \in \gamma_h^{a-}$  die Gestalt  $h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_l^a} ((P_h^{E_a} v_h)(lh) - (P_h^{E_a} v_h)((l+k)h)) = \psi_h^a(lh)$ . Andererseits ist in allen

Punkten  $mh \in G_h^a$  die Gleichung  $-\Delta_h(P_h^{E_a} v_h)(mh) = 0$  erfüllt. Zu zeigen bleibt, daß das Einfachschichtpotential im Unendlichen beschränkt ist. Aus Lemma 2.3, der Symmetrieeigenschaft der diskreten Fundamentallösung und der Bedingung (2.2) folgt zunächst

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l \in \gamma^{a-}} \psi_h^a(lh) h = \sum_{l \in \gamma^{a-}} \left( \sum_{k \in K \setminus K_l^a} \sum_{r \in \gamma^{a-}} (E_h(lh - rh) - E_h((l+k)h - rh)) v_h(rh) \right) h \\ &= \sum_{r \in \gamma^{a-}} v_h(rh) h \left( \sum_{l \in \gamma^{a-}} \sum_{k \in K \setminus K_l^a} (E_h(rh - lh) - E_h(rh - (l+k)h)) \right) = \sum_{r \in \gamma^{a-}} v_h(rh) h. \end{aligned}$$

Da die diskrete Fundamentallösung des Laplaceoperators in der Ebene bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist, gilt ausgehend von der bereits im Abschnitt 1.2.1 definierten Fundamentallösung  $E_h^2(x)$  und der soeben bewiesenen Gleichung

$$(P_h^{E_a} v_h)(mh) = \sum_{r \in \gamma^{a-}} v_h(rh) (E_h^2(mh - rh) + C) h = \sum_{r \in \gamma^{a-}} v_h(rh) E_h^2(mh - rh) h.$$

Betrachtet man zusätzlich die kontinuierliche Fundamentallösung (1.3), dann erhält man mit Hilfe von Lemma 1.2 und der Darstellung

$$(P_h^{E_a} v_h)(mh) = \sum_{r \in \gamma^{a-}} v_h(rh) \left( (E_h^2(mh - rh) - E(mh - rh)) + (E(mh - rh) - E(mh)) \right) h$$

die Abschätzung  $|(P_h^{E_a} v_h)(mh)| \leq \max_{r \in \gamma^{a-}} |v_h(rh)| \sum_{r \in \gamma^{a-}} \left( \frac{C h}{|mh - rh|} + \left| \ln \frac{|mh|}{|mh - rh|} \right| \right) h$ .

Der Rand  $\gamma_h^{a-}$  besteht nur aus endlich vielen Gitterpunkten. Folglich ist das Potential der Einfachschicht eine im Außengebiet diskret harmonische Funktion, die für  $|mh| \rightarrow \infty$  gegen Null strebt ■

**Satz 2.12:** Für jede auf  $\gamma_h^a^-$  definierte Gitterfunktion  $\psi_h^a(lh)$ , die der notwendigen Bedingung (2.2) genügt, ist das Gleichungssystem (2.3) eindeutig lösbar.

**Beweis:** In Verbindung mit der Fredholmschen Alternative wird gezeigt, daß das homogene Gleichungssystem (2.3) nur die triviale Lösung besitzt. Die notwendige Bedingung (2.2) ist automatisch erfüllt. Wenn  $v_h^*(rh)$  eine Lösung des homogenen Gleichungssystems (2.3) ist, dann ist neben der trivialen Lösung nach Satz 2.11 auch das Einfachschichtpotential  $(P_h^{E_a} v_h^*)(mh) = \sum_{r \in \gamma_h^a -} v_h^*(rh) E_h(mh - rh) h$  eine Lösung

des homogenen äußeren Neumannproblems. Aus Satz 2.10 folgt  $(P_h^{E_a} v_h^*)(mh) = C$  in allen Gitterpunkten  $mh \in G_h^a \cup \gamma_h^a^-$ . Betrachtet man zusätzlich das einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  entsprechende diskrete Gebiet  $G_h$ , das aus allen übrigen Gitterpunkten  $mh \in \mathbb{R}_h^2 : mh \notin (G_h^a \cup \gamma_h^a^-)$  besteht und für das  $\gamma_h^- \subset \gamma_h^a^-$  gilt, dann ist in allen Punkten  $mh \in G_h$  die Gleichung  $-\Delta_h(P_h^{E_a} v_h^*)(mh) = 0$  erfüllt und in den Randpunkten  $lh \in \gamma_h^-$  gilt  $(P_h^{E_a} v_h^*)(lh) = C$ . Aus dem Eindeigkeitsatz des inneren Dirichletproblems resultiert  $(P_h^{E_a} v_h^*)(mh) = C$  für alle  $mh \in G_h$ . Folglich ist das Potential  $(P_h^{E_a} v_h^*)(mh)$  in der ganzen Ebene konstant. Da außerdem in allen Randpunkten  $lh \in \gamma_h^a^-$  die Beziehung  $0 = -\Delta_h(P_h^{E_a} v_h^*)(lh) = v_h^*(lh) h^{-1}$  erfüllt ist, besitzt das homogene System (2.3) nur die triviale Lösung ■

### 2.3.2 Inneres Neumannproblem

**Satz 2.13:** Wenn das Gleichungssystem

$$\psi_h(lh) = \sum_{k \in K \setminus K_l} \sum_{r \in \gamma^-} (E_h(lh - rh) - E_h((l+k)h - rh)) v_h(rh) \quad \forall lh \in \gamma_h^- \quad (2.4)$$

lösbar ist und die Bedingung (2.1) erfüllt ist, dann ist das Einfachschichtpotential

$$(P_h^E v_h)(mh) = \sum_{r \in \gamma^-} v_h(rh) E_h(mh - rh) h \quad \forall mh \in (G_h \cup \gamma_h^-)$$

eine Lösung des inneren Neumannproblems  $(N_i)$ .

**Beweis:** Ist das Gleichungssystem (2.4) lösbar, dann gilt in jedem einzelnen Gitterpunkt  $lh \in \gamma_h^-$  für die diskrete Normalableitung des Potentials der Einfachschicht  $h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_l} ((P_h^E v_h)(lh) - (P_h^E v_h)((l+k)h)) = \psi_h(lh)$ . Ferner ist in allen inneren Gitterpunkten  $mh \in G_h$  die Differenzengleichung  $-\Delta_h(P_h^E v_h)(mh) = 0$  erfüllt ■

**Satz 2.14:** Die Bedingung (2.1) ist notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des Gleichungssystems (2.4).

**Beweis:** Die Notwendigkeit kann mit Hilfe der Gaußschen Summenformel aus dem Abschnitt 2.1.1 und der Symmetrieeigenschaft der diskreten Fundamentallösung



gezeigt werden. Im einzelnen gilt

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \gamma^-} \psi_h(lh) h &= \sum_{l \in \gamma^-} \left( \sum_{k \in K \setminus K_l} \sum_{r \in \gamma^-} (E_h(lh - rh) - E_h((l+k)h - rh)) v_h(rh) \right) h \\ &= \sum_{r \in \gamma^-} v_h(rh) h \left( \sum_{l \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_l} (E_h(rh - lh) - E_h(rh - (l+k)h)) \right) = 0. \end{aligned}$$

Zu untersuchen bleibt, ob die Bedingung (2.1) auch hinreichend ist. Nach der Gaußschen Summenformel besitzt das zum homogenen Gleichungssystem (2.4) adjungierte System

$$0 = \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r+k)h)) w_h(rh) \quad \forall lh \in \gamma_h^- \quad (2.5)$$

in allen Randpunkten  $rh \in \gamma_h^-$  die nichttriviale Lösung  $w_h(rh) = 1$ . Damit existiert wenigstens eine von Null verschiedene Lösung  $v_h^*(rh)$  des homogenen Systems (2.4). Gezeigt wird, daß  $\sum_{r \in \gamma^-} v_h^*(rh) h \neq 0$  gilt. Nach Satz 2.13 ist das Einfachschicht-

potential  $(P_h^E v_h^*)(mh) = \sum_{r \in \gamma^-} v_h^*(rh) E_h(mh - rh) h$  in den Punkten  $mh \in G_h \cup \gamma_h^-$  eine Lösung des homogenen inneren Neumannproblems. Andererseits hat dieses Problem die triviale Lösung, so daß aus dem Eindeutigkeitssatz  $(P_h^E v_h^*)(mh) = C$  für alle  $mh \in G_h \cup \gamma_h^-$  folgt. Wenn auf jedem Geradenstück, das bei achsenparalleler Verbindung der Punkte aus  $\Gamma_h = \{rh \in \mathbb{R}_h^2 \setminus G_h : |rh - mh| \leq \sqrt{2}h, mh \in G_h\}$  entsteht, mindestens zwei Punkte von  $\gamma_h^-$  liegen, dann kann man ein Außengebiet  $G_h^a$  konstruieren, das aus den Gitterpunkten  $mh \in \mathbb{R}_h^2 : mh \notin (G_h \cup \gamma_h^-)$  besteht und für das  $\gamma_h^{a-} \subset \gamma_h^-$  gilt. Angenommen, die Beziehung  $\sum_{r \in \gamma^-} v_h^*(rh) h = 0$  ist erfüllt,

dann kann in Analogie zum Satz 2.11 gezeigt werden, daß  $(P_h^E v_h^*)(mh)$  im Unendlichen gegen Null strebt. Da das Einfachschichtpotential in allen Randpunkten  $rh \in \gamma_h^{a-} \subset \gamma_h^-$  konstant ist, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz des äußeren Dirichletproblems  $(P_h^E v_h^*)(mh) = C$  für alle Punkte  $mh \in G_h^a$  und somit  $(P_h^E v_h^*)(mh) = C$  in jedem beliebigen Gitterpunkt  $mh \in \mathbb{R}_h^2$ . Andererseits ist auch in allen Randpunkten  $lh \in \gamma_h^-$  die Beziehung  $0 = -\Delta_h(P_h^E v_h^*)(lh) = v_h^*(lh) h^{-1}$  erfüllt. Da  $v_h^*$  jedoch eine nichttriviale Lösung ist, muß die obige Annahme falsch sein und deshalb  $\sum_{r \in \gamma^-} v_h^*(rh) h = C_1 \neq 0$  gelten. Im folgenden wird bewiesen, daß das homogene Gleichungssystem (2.4) keine von  $v_h^*$  linear unabhängige Lösung besitzt. Es sei  $v_h^{**}$  eine weitere nichttriviale Lösung des Systems (2.4). Aus den bisherigen Überlegungen resultiert  $\sum_{r \in \gamma^-} v_h^{**}(rh) h = C_2 \neq 0$ . Darüber hinaus ist  $v_h^\circ = v_h^* C_2 - v_h^{**} C_1$  eine

Lösung des homogenen Systems (2.4). Für diese spezielle Lösung kann man mit Hilfe der Gleichung  $\sum_{r \in \gamma^-} v_h^\circ(rh) h = 0$  zeigen, daß  $v_h^\circ(rh) = 0$  für alle  $rh \in \gamma_h^-$  und somit  $v_h^{**}(rh) = C_2/C_1 v_h^*(rh)$  gilt. Nach dem dritten Fredholmschen Satz besitzt das System (2.5) deshalb nur die linear unabhängige Lösung  $w_h(rh) = 1$  und aus dem vierten Fredholmschen Satz folgt schließlich die Behauptung des Satzes ■

**Bemerkung 2.2:** Ist  $G_h$  ein aus Rechtecken zusammengesetztes Gebiet, welches das in der Regel allgemeinere Ausgangsgebiet  $G$  hinreichend genau approximiert, dann kann bei Bedarf die zur Konstruktion des Außengebietes  $G_h^a$  notwendige Voraussetzung durch eine weitere Halbierung der Schrittweite  $h$  erfüllt werden. Zu beachten ist dabei nur, daß sowohl vor als auch nach der Halbierung der Schrittweite der Rand  $\Gamma^D$  übereinstimmt, der bei der achsenparallelen Verbindung aller zur Menge  $\Gamma_h$  gehörenden Gitterpunkte entsteht.

### 2.3.3 Inneres Dirichletproblem

Zur Lösung innerer Dirichletprobleme wird das modifizierte Einfachschichtpotential  $(P_h^{E_m} v_h)(mh) = \sum_{r \in \gamma^-} (v_h(rh) - Sv_h) E_h(mh - rh) h + Sv_h$  verwendet. Dabei sei  $Sv_h = (\sum_{s \in \gamma^-} h)^{-1} \sum_{s \in \gamma^-} v_h(sh) h$  und  $s = (s_1, s_2) : s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ . Charakteristisch für dieses Potential ist die Eigenschaft  $\sum_{r \in \gamma^-} (v_h(rh) - Sv_h) h = 0$ , die beim Beweis des Eindeutigkeitssatzes sichert, daß das auf ganz  $\mathbb{R}_h^2$  betrachtete Potential im Unendlichen beschränkt ist.

**Satz 2.15:** *Wenn das Gleichungssystem*

$$\varphi_h(lh) = \sum_{r \in \gamma^-} (v_h(rh) - Sv_h) E_h(lh - rh) h + Sv_h \quad \forall lh \in \gamma_h^- \quad (2.6)$$

*lösbar ist, dann stellt das Potential*

$$(P_h^{E_m} v_h)(mh) = \sum_{r \in \gamma^-} (v_h(rh) - Sv_h) E_h(mh - rh) h + Sv_h$$

*in allen Punkten  $mh \in G_h \cup \gamma_h^-$  eine Lösung des inneren Dirichletproblems  $(D_i)$  dar.*

**Beweis:** Ist das Gleichungssystem (2.6) lösbar, dann ist die Dirichletrandbedingung erfüllt. Außerdem gilt  $-\Delta_h (P_h^{E_m} v_h)(mh) = 0$  in allen Gitterpunkten  $mh \in G_h$  ■

**Satz 2.16:** *Das Gleichungssystem (2.6) ist für beliebig vorgegebene Randwerte  $\varphi_h(lh)$  eindeutig lösbar.*

**Beweis:** Die Behauptung des Satzes folgt aus der Fredholmschen Alternative, wenn das homogene Gleichungssystem (2.6) nur die triviale Lösung besitzt. Es sei  $v_h^*(rh)$  eine Lösung des homogenen Gleichungssystems (2.6). Neben der trivialen Lösung ist nach Satz 2.15 das Potential  $(P_h^{E_m} v_h^*)(mh) = \sum_{r \in \gamma^-} (v_h^*(rh) - Sv_h^*) E_h(mh - rh) h + Sv_h^*$  eine Lösung des homogenen inneren Dirichletproblems und aus dem Eindeutigkeitssatz folgt  $(P_h^{E_m} v_h^*)(mh) = 0$  für alle  $mh \in G_h \cup \gamma_h^-$ . Wenn bei der achsenparallelen Verbindung der Punkte aus  $\Gamma_h = \{rh \in \mathbb{R}_h^2 \setminus G_h : |rh - mh| \leq \sqrt{2}h, mh \in G_h\}$

mindestens zwei der Gitterpunkte auf jedem Geradenstück liegen, dann kann man ein Außengebiet  $G_h^a$  konstruieren, das aus den Punkten  $mh \in \mathbb{R}_h^2 : mh \notin (G_h \cup \gamma_h^-)$  besteht und für das  $\gamma_h^{a-} \subset \gamma_h^-$  gilt. Dadurch ergibt sich  $(P_h^{E_m} v_h^*)(lh) = 0$  für alle  $lh \in \gamma_h^{a-}$ . Außerdem ist in den Gitterpunkten  $mh \in G_h^a$  die Differenzengleichung  $-\Delta_h(P_h^{E_m} v_h^*)(mh) = 0$  erfüllt. In Analogie zum Beweis von Satz 2.11 kann man zeigen, daß das Potential  $(P_h^{E_m} v_h^*)(mh)$  im Unendlichen beschränkt ist. Von Bedeutung ist dabei die Eigenschaft  $\sum_{r \in \gamma^-} (v_h^*(rh) - S v_h^*) h = 0$ , mit deren Hilfe aus der Gleichung

$$\begin{aligned} (P_h^{E_m} v_h^*)(mh) &= \sum_{r \in \gamma^-} (v_h^*(rh) - S v_h^*) (E_h^2(mh - rh) + C) h + S v_h^* \\ &= \sum_{r \in \gamma^-} (v_h^*(rh) - S v_h^*) (E_h^2(mh - rh) - E(mh - rh)) + (E(mh - rh) - E(mh)) h + S v_h^* \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$|(P_h^{E_m} v_h^*)(mh)| \leq \max_{r \in \gamma^-} |v_h^*(rh) - S v_h^*| \sum_{r \in \gamma^-} \left( \frac{C h}{|mh - rh|} + \left| \ln \frac{|mh|}{|mh - rh|} \right| \right) h + S v_h^*$$

folgt. Da der Rand  $\gamma_h^-$  nur aus endlich vielen Punkten besteht, strebt das Potential  $(P_h^{E_m} v_h^*)(mh)$  für  $|mh| \rightarrow \infty$  gegen  $S v_h^*$  und ist damit beschränkt. Nach dem Eindeutigkeitssatz des äußeren Dirichletproblems ist das Einfachschichtpotential in allen Gitterpunkten  $mh \in G_h^a$  identisch Null, so daß insgesamt  $(P_h^{E_m} v_h^*)(mh) = 0$  für alle  $mh \in \mathbb{R}_h^2$  gilt. Ferner erhält man ausgehend von der in den Punkten  $lh \in \gamma_h^-$  geltenden Gleichung  $0 = -\Delta_h(P_h^{E_m} v_h^*)(lh) = (v_h^*(lh) - S v_h^*) h^{-1}$  die Beziehung  $v_h^*(lh) \sum_{s \in \gamma^-} h = \sum_{s \in \gamma^-} v_h^*(sh) h$ , aus der  $v_h^*(lh) = C$  folgt. Setzt man die Lösung  $v_h^*(lh)$  in das homogene Gleichungssystem (2.6) ein, dann ergibt sich  $C = 0$  ■

### 2.3.4 Äußeres Dirichletproblem

Das Potential  $(P_h^{E_{am}} v_h)(mh) = \sum_{r \in \gamma^{a-}} (v_h(rh) - S^a v_h) E_h(mh - rh) h + S^a v_h$  mit  $S^a v_h = \left( \sum_{s \in \gamma^{a-}} h \right)^{-1} \sum_{s \in \gamma^{a-}} v_h(sh) h$  steht im Mittelpunkt der weiteren Untersuchungen. Dieses Einfachschichtpotential ist auf Grund der Eigenschaft  $\sum_{r \in \gamma^{a-}} (v_h(rh) - S^a v_h) h = 0$  im Unendlichen beschränkt.

**Satz 2.17:** *Wenn das Gleichungssystem*

$$\varphi_h^a(lh) = \sum_{r \in \gamma^{a-}} (v_h(rh) - S^a v_h) E_h(lh - rh) h + S^a v_h \quad \forall lh \in \gamma_h^{a-} \quad (2.7)$$

*lösbar ist, dann ist das Potential*

$$(P_h^{E_{am}} v_h)(mh) = \sum_{r \in \gamma^{a-}} (v_h(rh) - S^a v_h) E_h(mh - rh) h + S^a v_h$$

*in den Punkten  $mh \in G_h^a \cup \gamma_h^{a-}$  eine Lösung des äußeren Dirichletproblems  $(D_a)$ .*

**Beweis:** Wenn das Gleichungssystem (2.7) lösbar ist, dann ist die Randbedingung des äußeren Dirichletproblems erfüllt. Außerdem gilt  $-\Delta_h(P_h^{E_{am}}v_h)(mh) = 0$  in den Gitterpunkten  $mh \in G_h^a$  und in Analogie zum Beweis von Satz 2.16 kann man zeigen, daß das Potential  $(P_h^{E_{am}}v_h)(mh)$  im Unendlichen beschränkt ist ■

**Satz 2.18:** *Das Gleichungssystem (2.7) ist bei beliebiger Wahl der Randwerte  $\varphi_h^a(lh)$  eindeutig lösbar.*

**Beweis:** Wenn  $v_h^*(rh)$  eine Lösung des homogenen Gleichungssystems (2.7) ist, dann ist nach Satz 2.17 das im Unendlichen beschränkte Potential  $(P_h^{E_{am}}v_h^*)(mh)$  eine Lösung des homogenen äußeren Dirichletproblems. Da andererseits auch die triviale Lösung existiert, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz  $(P_h^{E_{am}}v_h^*)(mh) = 0$  in allen Gitterpunkten  $mh \in G_h^a \cup \gamma_h^{a-}$ . Betrachtet man ferner das Innengebiet  $G_h$ , das aus allen Gitterpunkten  $mh \in \mathbb{R}_h^2 : mh \notin (G_h^a \cup \gamma_h^{a-})$  besteht und für das außerdem  $\gamma_h^- \subset \gamma_h^{a-}$  gilt, dann erhält man für das diskrete Einfachschichtpotential in den Randpunkten  $lh \in \gamma_h^-$  die Darstellung  $(P_h^{E_{am}}v_h^*)(lh) = 0$ . Darüber hinaus ist in den Gitterpunkten  $mh \in G_h$  die Differenzengleichung  $-\Delta_h(P_h^{E_{am}}v_h^*)(mh) = 0$  erfüllt. Da aus dem Eindeutigkeitssatz des inneren Dirichletproblems  $(P_h^{E_{am}}v_h^*)(mh) = 0$  in allen Punkten  $mh \in G_h$  folgt, ist das Potential  $(P_h^{E_{am}}v_h^*)(mh)$  auf dem gesamten Gitter  $\mathbb{R}_h^2$  identisch Null. Ferner resultiert aus der in den Randpunkten  $lh \in \gamma_h^{a-}$  geltenden Beziehung  $0 = -\Delta_h(P_h^{E_{am}}v_h^*)(lh) = (v_h^*(lh) - S^a v_h^*)h^{-1}$  die Gleichung  $v_h^*(lh) \sum_{s \in \gamma_h^{a-}} h = \sum_{s \in \gamma_h^{a-}} v_h^*(sh)h$ , aus der man  $v_h^*(lh) = C$  erhält. Setzt man die auf  $\gamma_h^{a-}$  konstante Lösung  $v_h^*(lh)$  in das homogene Gleichungssystem (2.7) ein, dann ergibt sich  $v_h^*(lh) = 0$ . Damit besitzt das homogene System (2.7) nur die triviale Lösung und die Behauptung des Satzes folgt aus der Fredholmschen Alternative ■

Die Ausführungen in diesem Kapitel beziehen sich hauptsächlich auf die diskrete Laplacegleichung. Andererseits kann die Lösung der Poissongleichung mit Hilfe des diskreten Volumenpotentials und der Lösung der Laplacegleichung dargestellt werden. Dabei erfüllt das Volumenpotential  $(V_h f_h)(lh) = \sum_{m \in M} E_h(lh - mh) f_h(mh) h^2$  in den Punkten  $lh \in G_h$  bzw. das Potential  $(V_h f_h)(lh) = \sum_{m \in M^a} E_h(lh - mh) f_h(mh) h^2$  in den Gitterpunkten  $lh \in G_h^a$  die Gleichung  $(-\Delta_h V_h f_h)(lh) = f_h(lh)$ . Verwiesen sei in diesem Zusammenhang auf die Eigenschaft 6 des in der Einleitung zitierten Theorems von SEELEY, auch wenn an dieser Stelle noch keine Aufspaltung in ein diskretes Einfach- und Doppelschichtpotential erfolgt.

Von den Eigenschaften der diskreten Fundamentallösung der Laplacegleichung in der Ebene ist in diesem Kapitel im wesentlichen nur das Verhalten im Unendlichen und die Gültigkeit der Differenzengleichung  $-\Delta_h E_h(x) = \delta_h(x)$  von Bedeutung. Die konkrete Gestalt der bis auf eine Konstante eindeutig bestimmten Fundamentallösung wird erst in den Kapiteln 3 und 4 eine Rolle spielen.

Als ein Schwerpunkt für den weiteren Ausbau der Theorie der Differenzenpotentiale sind Lösbarkeitsaussagen für Dirichletprobleme zu betrachten, die auf dem Doppelschichtpotential beruhen. Im Gegensatz zur klassischen Potentialtheorie können die entsprechenden Sätze nicht mit Hilfe der zum Neumannproblem adjungierten Gleichungen bewiesen werden. Um konkret auf das im diskreten Fall auftretende Problem aufmerksam zu machen, wird noch einmal das Gleichungssystem (2.5) aus Abschnitt 2.3.2 betrachtet. Die rechte Seite dieses Systems stimmt nicht mit dem Doppelschichtpotential überein, da für dieses Potential in den Randpunkten  $lh \in \gamma_h^-$

$$(P_h^D w_h)(lh) = \sum_{r \in \gamma^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r + k)h)) w_h(rh) - w_h(lh)$$

gilt. Da über das Einfachschichtpotential jedoch genügend Informationen vorhanden sind, können eventuell die in der Bemerkung 2.1 angegebenen Gleichungen als neuer Ansatzpunkt für den Beweis von Lösbarkeitsaussagen im Zusammenhang mit dem Potential der Doppelschicht genutzt werden. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, sich bei den theoretischen Untersuchungen zunächst nur auf Halbräume zu beschränken, um die mit den Innen- und Außenecken verbundenen Schwierigkeiten zu umgehen.

Die Arbeit auf einem ungleichmäßigen Gitter ist theoretisch zunächst nicht ausgeschlossen. Abgesehen davon, ob sich in diesem Fall der Aufwand zur numerischen Berechnung der diskreten Fundamentallösung lohnt, sind neue theoretische Überlegungen besonders an den Stellen notwendig, an denen die Symmetrieeigenschaften der diskreten Fundamentallösung benutzt werden.

# Kapitel 3

## Approximation und Konvergenz

Im Kapitel 2 wird ausgehend von der diskreten Laplacegleichung in der Ebene eine Möglichkeit zur Lösung diskreter Randwertprobleme mit Hilfe von Differenzpotentialen beschrieben. Um den Zusammenhang zwischen der diskreten Lösung und der Lösung des kontinuierlichen Ausgangsproblems beurteilen zu können, werden im folgenden Konvergenzuntersuchungen durchgeführt. Betont sei, daß der hier betrachtete zweidimensionale Fall im Vergleich zum dreidimensionalen Fall der theoretisch anspruchsvollere ist. Nicht zuletzt aus diesem Grund sind die zu führenden Beweise im allgemeinen sehr umfangreich, so daß es vom Aufwand her zweckmäßig erscheint, sich hauptsächlich auf innere Dirichletprobleme zu konzentrieren.

In diesem Kapitel steht neben dem diskreten Potential der Einfachschicht das diskrete Volumenpotential im Mittelpunkt, das vor allem dann eine Rolle spielt, wenn anstelle der diskreten Laplacegleichung die Poissongleichung zu lösen ist. Da sowohl die im Kern der beiden Differenzpotentiale stehende diskrete Fundamentallösung als auch die kontinuierliche Fundamentallösung in der Ebene nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sind, ist bei den Konvergenzabschätzungen unbedingt auf die Verträglichkeit der Konstanten zu achten. Die folgenden Untersuchungen beziehen sich konkret auf die Fundamentallösungen  $E_h^2(x)$  und  $E(x)$  aus dem Abschnitt 1.2.1.

Während im Abschnitt 3.1 für alle  $h \leq \varepsilon^{-1}$  die gleichmäßige Beschränktheit der diskreten Operatoren gezeigt wird, erhält man anhand der Ergebnisse im Abschnitt 3.2 einen Überblick über das Konvergenzverhalten der diskreten Potentiale. Die einzelnen Sätze werden hauptsächlich in den Räumen  $c$  und  $l_p$  mit  $1 \leq p < \infty$  bewiesen. Die erzielten Abschätzungen bilden eine wesentliche Grundlage für den Beweis der Konvergenz der diskreten Lösung gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems. Eng damit verbunden ist die Frage nach der Konvergenz der diskreten Dichte gegen die Dichte des kontinuierlichen Potentials. Als unmittelbarer Ausgangspunkt der Überlegungen ist vor allem das folgende Theorem zu betrachten (siehe zum Beispiel WLOKA [Wlo]):

Es seien  $B_1, B_2, B_{1,h}$  und  $B_{2,h}$  Banachräume,  $A : B_1 \rightarrow B_2$  und  $A_h : B_{1,h} \rightarrow B_{2,h}$  lineare Operatoren und  $D_{1,h} : B_1 \rightarrow B_{1,h}$  und  $D_{2,h} : B_2 \rightarrow B_{2,h}$  Diskretisierungsoperatoren. Für  $u \in B_1$ ,  $u_h \in B_{1,h}$ ,  $f \in B_2$  und  $f_h \in B_{2,h}$  mögen die Beziehungen

$$\begin{aligned} Au &= f, \quad A_h u_h = f_h \quad \text{und} \\ \|D_{2,h}f - f_h\| &\rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein. Gilt ferner

$$\begin{aligned} \|D_{2,h}Au - A_h D_{1,h}u\| &\rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0 & ( \text{Approximation} ) \\ \text{und } \{A_h^{-1}\} &\text{ist gleichmäßig beschränkt,} & ( \text{Stabilität} ) \end{aligned}$$

dann folgt  $\|D_{1,h}u - u_h\| \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ .

Im Abschnitt 1.2.1 ist bereits darauf hingewiesen worden, daß eine Möglichkeit zur Fortsetzung der diskreten Fundamentallösung ins Kontinuierliche darin besteht, den bei der Rücktransformation  $F_h^{-1} = R_h F$  der diskreten Fouriertransformation auftretenden Einschränkungoperator  $R_h$  auf das Gitter  $\mathbb{R}_h^2$  wegzulassen. Da sich diese natürliche Art der Fortsetzung von den Methoden unterscheidet, bei denen erst ein Interpolationsoperator zu konstruieren ist, soll der hier gegebene Vorteil genutzt werden, um die Differenz zwischen dem kontinuierlichen Potential und dem fortgesetzten diskreten Potential in den kontinuierlichen Normen abzuschätzen.

### 3.1 Gleichmäßige Beschränktheit der diskreten Operatoren

Einleitend werden die wichtigsten der im Kapitel 3 verwendeten Begriffe erläutert. Es sei  $G$  ein einfach zusammenhängendes und beschränktes Gebiet. Alle in Verbindung mit  $G_h = (G \cap \mathbb{R}_h^2)$  eingeführten Bezeichnungen findet man am Anfang von Kapitel 2. Zu achten ist dabei besonders auf die Beschreibung des Randes  $\gamma_h$ , bestehend aus den Randschichten  $\gamma_h^+$  und  $\gamma_h^-$ . Die hier konkret betrachtete diskrete Fundamentallösung  $E_h^2(x)$  ist bereits im Abschnitt 1.2.1 analysiert worden. Außenecken spielten bei den bisherigen Untersuchungen keine Rolle. Aus beweistechnischen Gründen ist es jedoch für die folgenden Abschätzungen günstig, neben der Randschicht  $\gamma_h^-$  auch den Rand  $\Gamma_h = \{rh \in \mathbb{R}_h^2 \setminus G_h : |rh - mh| \leq \sqrt{2}h, mh \in G_h\}$  zu betrachten. Bezeichnet man mit  $\gamma_h^A$  die Menge der Außenecken, die zu  $\Gamma_h$  gehören, dann gilt  $\Gamma_h = \gamma_h^- \cup \gamma_h^A$ . Weiterhin sei  $\Gamma^D$  der Rand, der bei der achsenparallelen Verbindung aller Gitterpunkte aus  $\Gamma_h$  entsteht.

Ausgehend vom diskreten Volumenpotential  $(V_h f_h)(lh) = \sum_{m \in M} E_h^2(lh - mh) f_h(mh) h^2$  und dem diskreten Einfachschichtpotential  $(P_h^E v_h)(lh) = \sum_{r \in \gamma^-} v_h(rh) E_h^2(lh - rh) h$

soll in diesem Abschnitt für beschränkte Gebiete gezeigt werden, daß die Operatoren  $V_h$  und  $P_h^E$  für alle Schrittweiten  $h \leq e^{-1}$  gleichmäßig beschränkt sind. Während bei der Abschätzung des diskreten Einfachschichtpotentials die auftretende Konstante im wesentlichen von der Bogenlänge  $B(\Gamma^D)$  des Randes  $\Gamma^D$  abhängt, spielt bei der Abschätzung des Volumenpotentials der Flächeninhalt  $A(G_h) = \sum_{m \in M} h^2$  eine Rolle. Vermerkt sei, daß durch die Bedingung  $h \leq e^{-1}$  die einzelnen Abschätzungen vereinfacht werden und die dominierende Rolle der Ausdrücke  $h^p |\ln h|$  mit  $1 \leq p$  im Vergleich zu den Potenzen  $h^p$  betont wird. Eine Abschwächung dieser Bedingung ist möglich. Im Mittelpunkt steht zunächst die Abschätzung des Operators  $V_h$ .

**Satz 3.1:** Die Operatoren  $V_h : c(G_h) \rightarrow l_1(G_h)$  und  $V_h : l_p(G_h) \rightarrow l_q(G_h)$  mit  $1 < p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  sind für alle  $h \leq e^{-1}$  gleichmäßig beschränkt.

**Beweis:** Im Fall  $f_h \in l_p(G_h)$  mit  $1 < p < \infty$  und  $\|f_h\|_{l_p(G_h)} = (\sum_{m \in M} |f_h(mh)|^p h^2)^{1/p}$  gilt nach der Hölderschen Ungleichung in jedem Gitterpunkt  $lh \in G_h$

$$|(V_h f_h)(lh)| \leq (\sum_{m \in M} |E_h^2(lh - mh)|^q h^2)^{1/q} \|f_h\|_{l_p(G_h)}.$$

Als Abschätzung in der  $l_q$ -Norm erhält man

$$\|V_h f_h\|_{l_q(G_h)} \leq \left( \sum_{l \in M} \left( \sum_{m \in M} |E_h^2(lh - mh)|^q h^2 \right) h^2 \right)^{1/q} \|f_h\|_{l_p(G_h)}.$$

Im weiteren sei  $G_h^* = \{mh \in G_h : mh \neq lh\}$ . Aus Lemma 1.2 und der Abschätzung von  $\|\frac{h}{|lh - mh|}\|_{l_q(G_h^*)}$  im Beweis von Satz 1.2 resultiert

$$\begin{aligned} \|E_h^2(lh - mh)\|_{l_q(G_h^*)} &\leq \|E_h^2(lh - mh) - E(lh - mh)\|_{l_q(G_h^*)} + \|E(lh - mh)\|_{l_q(G_h^*)} \\ &\leq C(h) + \|E(lh - mh)\|_{l_q(G_h^*)}, \end{aligned}$$

wobei die von  $h$  abhängige Konstante  $C$  für  $h \rightarrow 0$  gegen Null strebt. Die Summe  $(\sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} |E(lh - mh)|^q h^2)^{1/q}$  approximiert das Parameterintegral  $(\int_{G_M} |E(lh - x)|^q dx)^{1/q}$ ,

dessen Existenz durch Lemma 1.6 gesichert ist. Für alle Punkte  $y = lh \in G_h$  und alle  $h \leq e^{-1}$  kann man mit Hilfe dieses Integrals zeigen, daß  $\|E_h^2(lh - mh)\|_{l_q(G_h^*)} \leq C_1$  gilt, wobei die Konstante  $C_1$  von  $h$  und  $y$  unabhängig ist. Wird zusätzlich im Punkt  $mh = lh$  die diskrete Fundamentallösung in Analogie zu Lemma 1.3 abgeschätzt, dann erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} S &= \left( \sum_{l \in M} \left( \sum_{m \in M} |E_h^2(lh - mh)|^q h^2 \right) h^2 \right)^{1/q} \\ &= \left( \sum_{l \in M} \left( \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} |E_h^2(lh - mh)|^q h^2 + |E_h^2(0, 0)|^q h^2 \right) h^2 \right)^{1/q} \\ &\leq \left( \sum_{l \in M} h^2 \right)^{1/q} \left( C_1^q + (C_2 + C_3 |\ln h|)^q h^2 \right)^{1/q} \\ &\leq A(G_h)^{1/q} (C_1^q + (C_2 h^{2/q} + C_3 h^{2/q} |\ln h|)^q)^{1/q}. \end{aligned}$$



Auf Grund von  $\lim_{h \rightarrow 0} h^{2/q} |\ln h| = 0$  ist der Term  $h^{2/q} |\ln h|$  für  $h \leq e^{-1}$  beschränkt, so daß für den Ausdruck  $S$  eine von  $h$  unabhängige obere Schranke existiert. Ist  $f_h$  aus dem Raum  $c(G_h)$  mit der Norm  $\|f_h\|_{c(G_h)} = \max_{m \in M} |f_h(mh)|$ , dann kann man ausgehend von der in allen Gitterpunkten  $lh \in G_h$  geltenden Ungleichung  $|(V_h f_h)(lh)| \leq \sum_{m \in M} |E_h^2(lh - mh)| h^2 \|f_h\|_{c(G_h)}$  zeigen, daß

$$\|V_h f_h\|_{l_1(G_h)} \leq A(G_h) (C_1 + C_2 h^2 + C_3 h^2 |\ln h|) \|f_h\|_{c(G_h)}$$

gilt. Da es für alle Summanden auf der rechten Seite eine von  $h$  unabhängige obere Schranke gibt, ist der Operator  $V_h : c(G_h) \rightarrow l_1(G_h)$  gleichmäßig beschränkt ■

**Satz 3.2:** Die Operatoren  $V_h : c(G_h) \rightarrow c(G_h)$  und  $V_h : l_p(G_h) \rightarrow c(G_h)$  mit  $1 < p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  sind für alle  $h \leq e^{-1}$  gleichmäßig beschränkt.

**Beweis:** Im Fall  $f_h \in l_p(G_h)$  mit  $1 < p < \infty$  erhält man in Analogie zum Beweis von Satz 3.1 in jedem Gitterpunkt  $lh \in G_h$  die Beziehung

$$\begin{aligned} |(V_h f_h)(lh)| &\leq \left( \sum_{m \in M} |E_h^2(lh - mh)|^q h^2 \right)^{1/q} \|f_h\|_{l_p(G_h)} \\ &\leq (C_1^q + (C_2 h^{2/q} + C_3 h^{2/q} |\ln h|)^q)^{1/q} \|f_h\|_{l_p(G_h)}. \end{aligned}$$

In gleicher Weise kann man für  $f_h \in c(G_h)$  zeigen, daß

$$|(V_h f_h)(lh)| \leq (C_1 + h^2 (C_2 + C_3 |\ln h|)) \|f_h\|_{c(G_h)}$$

gilt. Da bei allen Abschätzungen die rechte Seite nicht vom konkret betrachteten Gitterpunkt  $lh \in G_h$  abhängt, gelten die entsprechenden Aussagen auch für das Maximum von  $|(V_h f_h)(lh)|$  ■

Für den Operator  $V_h : l_1(G_h) \rightarrow c(G_h)$  konnte nur eine von  $h$  abhängige obere Schranke gefunden werden.

Untersucht wird im folgenden das Verhalten des Operators  $P_h^E$  in den Räumen  $c(\gamma_h^-)$  und  $l_p(\gamma_h^-)$  mit  $\|f_h\|_{c(\gamma_h^-)} = \max_{rh \in \gamma_h^-} |f_h(rh)|$  und  $\|f_h\|_{l_p(\gamma_h^-)} = \left( \sum_{r \in \gamma_h^-} |f_h(rh)|^p h \right)^{1/p}$ .

**Satz 3.3:** Die Operatoren  $P_h^E : c(\gamma_h^-) \rightarrow l_1(\gamma_h^-)$  und  $P_h^E : l_p(\gamma_h^-) \rightarrow l_q(\gamma_h^-)$  mit  $1 < p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  sind für alle  $h \leq e^{-1}$  gleichmäßig beschränkt.

**Beweis:** Die Dichte  $v_h$  des diskreten Einfeldschichtpotentials sei zunächst aus dem Raum  $l_p(\gamma_h^-)$ . In Analogie zum Beweis von Satz 3.1 erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|P_h^E v_h\|_{l_q(\gamma_h^-)} &\leq \left( \sum_{l \in \gamma_h^-} \left( \sum_{r \in \gamma_h^-} |E_h^2(lh - rh)|^q h \right) h \right)^{1/q} \|v_h\|_{l_p(\gamma_h^-)} \\ &\leq B(\Gamma^D)^{1/q} (C_1^q + (C_2 h^{1/q} + C_3 h^{1/q} |\ln h|)^q)^{1/q} \|v_h\|_{l_p(\gamma_h^-)}, \end{aligned}$$

wenn anstelle von Lemma 1.6 und dem auf Lemma 1.2 aufbauenden Beweis von Satz 1.2 sowohl auf Lemma 1.7 als auch auf Lemma 1.8 Bezug genommen wird. Die auf der rechten Seite stehenden Summanden sind beschränkt, da insbesondere  $\lim_{h \rightarrow 0} h^{1/q} |\ln h| = 0$  gilt. Im Fall  $v_h \in c(\gamma_h^-)$  wird mit Hilfe der Ungleichung

$$\|P_h^E v_h\|_{l_1(\gamma_h^-)} \leq B(\Gamma^D) (C_1 + C_2 h + C_3 h |\ln h|) \|v_h\|_{c(\gamma_h^-)}$$

die gleichmäßige Beschränktheit des Operators  $P_h^E : c(\gamma_h^-) \rightarrow l_1(\gamma_h^-)$  gezeigt ■

**Satz 3.4:** Die Operatoren  $P_h^E : c(\gamma_h^-) \rightarrow c(\gamma_h^-)$  und  $P_h^E : l_p(\gamma_h^-) \rightarrow c(\gamma_h^-)$  mit  $1 < p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  sind für alle  $h \leq e^{-1}$  gleichmäßig beschränkt.

**Beweis:** Es sei  $lh \in \gamma_h^-$  ein beliebiger Randpunkt. Im Fall  $v_h \in l_p(\gamma_h^-)$  folgt aus der Hölderschen Ungleichung und den bereits in den vorhergehenden Sätzen erwähnten Eigenschaften der diskreten Fundamentallösung die Beziehung

$$|(P_h^E v_h)(lh)| \leq (C_1^q + (C_2 h^{1/q} + C_3 h^{1/q} |\ln h|)^q)^{1/q} \|v_h\|_{l_p(\gamma_h^-)}.$$

Auf analoge Weise erhält man für  $v_h \in c(\gamma_h^-)$

$$|(P_h^E v_h)(lh)| \leq (C_1 + h(C_2 + C_3 |\ln h|)) \|v_h\|_{c(\gamma_h^-)}.$$

Offensichtlich gelten alle diese Abschätzungen auch für  $\max_{lh \in \gamma_h^-} |(P_h^E v_h)(lh)|$  ■

Für den Operator  $P_h^E : l_1(\gamma_h^-) \rightarrow c(\gamma_h^-)$  findet man nach dem gleichen Prinzip nur eine von  $h$  abhängige obere Schranke.

**Bemerkung 3.1:** Im Kapitel 2 wird zur Formulierung von Lösbarkeitsaussagen für innere Dirichletprobleme das Einfachschichtpotential

$$(P_h^{E_m} v_h)(lh) = \sum_{r \in \gamma^-} (v_h(rh) - S v_h) E_h^2(lh - rh) h + S v_h$$

mit  $S v_h = (\sum_{s \in \gamma^-} h)^{-1} \sum_{s \in \gamma^-} v_h(sh) h$  betrachtet. Auch für den diskreten Operator  $P_h^{E_m}$  gelten die in den Sätzen 3.3 und 3.4 untersuchten Eigenschaften. Eine mögliche Vorgehensweise bei der Beweisführung soll am Beispiel  $P_h^{E_m} : l_p(\gamma_h^-) \rightarrow l_q(\gamma_h^-)$  mit  $1 < p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  erläutert werden.

Aus der Hölderschen Ungleichung folgt  $|S v_h| \leq (\sum_{s \in \gamma^-} h)^{-1} (\sum_{s \in \gamma^-} h)^{1/q} \|v_h\|_{l_p(\gamma_h^-)}$ . Daraus resultiert  $\|S v_h\|_{l_q(\gamma_h^-)} \leq (\sum_{s \in \gamma^-} h)^{2/q-1} \|v_h\|_{l_p(\gamma_h^-)} \leq (C(B(\Gamma^D)))^{2/q-1} \|v_h\|_{l_p(\gamma_h^-)}$ .

Andererseits gilt  $\|Sv_h\|_{l_p(\gamma_h^-)} \leq \|v_h\|_{l_p(\gamma_h^-)}$ . Mit Hilfe dieser Abschätzungen sowie der Minkowskischen Ungleichung und dem Beweis von Satz 3.3 erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} & \|P_h^{E_m} v_h\|_{l_q(\gamma_h^-)} \\ & \leq \left( \sum_{l \in \gamma^-} \left( \sum_{r \in \gamma^-} |E_h^2(lh - rh)|^q h \right) h \right)^{1/q} \left( \|Sv_h\|_{l_p(\gamma_h^-)} + \|v_h\|_{l_p(\gamma_h^-)} \right) + \|Sv_h\|_{l_q(\gamma_h^-)} \\ & \leq \left( B(\Gamma^D)^{1/q} (C_1^q + (C_2 h^{1/q} + C_3 h^{1/q} |\ln h|)^q)^{1/q} + (C_4(B(\Gamma^D)))^{2/q-1} \right) \|v_h\|_{l_p(\gamma_h^-)}. \end{aligned}$$

Die folgenden beiden Sätze können nach dem gleichen Prinzip wie bisher bewiesen werden. Dabei ist lediglich Lemma 1.9 anstelle von Lemma 1.7 zu verwenden und auf die Bemerkung 1.2 in Verbindung mit Lemma 1.8 zu achten.

**Satz 3.5:** Die Operatoren  $P_h^E : c(\gamma_h^-) \rightarrow l_1(G_h)$  und  $P_h^E : l_p(\gamma_h^-) \rightarrow l_q(G_h)$  mit  $1 < p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  sind für alle  $h \leq e^{-1}$  gleichmäßig beschränkt.

**Satz 3.6:** Für alle  $h \leq e^{-1}$  sind die diskreten Operatoren  $P_h^E : c(\gamma_h^-) \rightarrow c(G_h)$  und  $P_h^E : l_p(\gamma_h^-) \rightarrow c(G_h)$  mit  $1 < p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gleichmäßig beschränkt.

## 3.2 Konvergenzresultate

Im folgenden wird in Analogie zu den beweistechnischen Grundlagen im Kapitel 1 vorausgesetzt, daß die Bedingung  $h \leq e^{-1}$  erfüllt ist.

### 3.2.1 Approximationsaussagen

Untersucht wird zunächst das Volumenpotential. Das bei der Diskretisierung von Randwertaufgaben generell auftretende Problem der Gebietsapproximation soll vorerst vernachlässigt werden. Anstelle von  $G$  wird daher das Gebiet  $G_M = \bigcup_{m \in M} W(mh)$  betrachtet, wobei  $W(mh)$  das Quadrat mit dem Mittelpunkt  $mh$  und der Seitenlänge  $h$  ist. In allen Punkten  $x \in G_M \setminus G$  sei  $f(x) = 0$ . Die Differenz zwischen dem Volumenpotential  $(V_h f_h)(y) = \sum_{m \in M} E_h^2(y - mh) f_h(mh) h^2$  und dem kontinuierlichen Potential  $(Vf)(y) = \int_{G_M} E(y - x) f(x) dx$  wird in der  $c$ - und  $l_p$ -Norm und auf Grund der natürlichen Fortsetzbarkeit des diskreten Potentials auch in den Räumen  $C$  und  $L_p$  abgeschätzt. Dabei sei  $E(y - x)$  die Fundamentallösung (1.3) aus dem Abschnitt 1.2.1 und  $f_h(mh)$  die Einschränkung der Funktion  $f(x)$  auf das Gitter  $\mathbb{R}_h^2$ .

**Satz 3.7:** Ist die Funktion  $f(x)$  aus  $L_\infty(G_M)$  und Riemann-integrierbar, dann gilt  $\|V_h f_h - V f\|_{c(G_h)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Für  $f \in C^{0,\alpha}(G_M)$  mit  $0 < \alpha \leq 1$  und  $\|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)} = \sup_{x \in G_M} |f(x)| + \sup_{x,y \in G_M, x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$  erhält man die Abschätzung

$$\|V_h f_h - V f\|_{c(G_h)} \leq C h^\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)}.$$

**Beweis:** In jedem Gitterpunkt  $lh \in G_h$  gilt

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m \in M} E_h^2(lh - mh) f_h(mh) h^2 - \int_{G_M} E(lh - x) f(x) dx \right| \\ & \leq |E_h^2(0) f_h(lh) h^2| + \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} |E_h^2(lh - mh) - E(lh - mh)| |f_h(mh)| h^2 \\ & + \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} |E(lh - mh) f_h(mh) h^2 - \int_{W(mh)} E(lh - x) f(x) dx| + \left| \int_{W(lh)} E(lh - x) f(x) dx \right|. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die Summanden auf der rechten Seite können wie folgt abgeschätzt werden:

Ausgehend von Lemma 1.3 erhält man für  $h \leq e^{-1}$  die Beziehung

$$|E_h^2(0) f_h(lh) h^2| \leq C_1 h^2 |\ln h| \|f_h\|_{c(G_h)}. \quad (3.2)$$

Betrachtet man nur die Punkte  $mh \in G_h^* = \{mh \in G_h : m \neq l\}$ , dann ergibt sich aus Lemma 1.2 und der Abschätzung von  $\|\frac{h}{|lh-mh|}\|_{l_1(G_h^*)}$  im Beweis von Satz 1.2

$$\sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} |E_h^2(lh - mh) - E(lh - mh)| |f_h(mh)| h^2 \leq C_2 (\text{diam}(G_h)) h \|f_h\|_{c(G_h)}. \quad (3.3)$$

Dabei ist  $\text{diam}(G_h) = \max_{m_1, m_2 \in M} |m_1 h - m_2 h|$ . Ferner gilt

$$\sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} |E(lh - mh) f_h(mh) h^2 - \int_{W(mh)} E(lh - x) f(x) dx| \leq S_1 + S_2 \quad (3.4)$$

$$\text{mit } S_1 = \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} \left| \int_{W(mh)} E(lh - mh) (f_h(mh) - f(x)) dx \right|$$

$$\text{und } S_2 = \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} \int_{W(mh)} |E(lh - mh) - E(lh - x)| |f(x)| dx.$$

Untersucht wird zunächst der Ausdruck  $S_1$ . Wie bereits im Abschnitt 3.1 erwähnt, approximiert die Summe  $\sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} |E(lh - mh)| h^2$  das Parameterintegral  $\int_{G_M} |E(lh - x)| dx$ .

Mit Hilfe dieses Integrals ist für alle  $y = lh \in G_h$  und  $h \leq e^{-1}$  eine Abschätzung

in der Form  $\sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} |E(lh - mh)| h^2 \leq C$  möglich, wobei die Konstante  $C$  von  $h$  und  $y$  unabhängig ist. Im Fall  $f \in C^{0,\alpha}(G_M)$  erhält man

$$S_1 \leq \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} \left( \sup_{\substack{x \in W(mh) \\ x \neq mh}} \frac{|f_h(mh) - f(x)|}{|mh - x|^\alpha} \left( \frac{\sqrt{2}h}{2} \right)^\alpha \right) |E(lh - mh)| h^2 \leq C_3 h^\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)}. \quad (3.5)$$

Ist  $f \in L_\infty(G_M)$  und Riemann-integrierbar, dann gilt für  $h \rightarrow 0$

$$S_1 \leq \sup_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} \left( \sup_{x \in W(mh)} |f(x)| - \inf_{x \in W(mh)} |f(x)| \right) \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} |E(lh - mh)| h^2 \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Abzuschätzen bleibt der Ausdruck  $S_2$ . Ausgehend von der Taylorentwicklung der Funktion  $y(x) = \ln \frac{|lh-x|}{|lh-mh|}$  an der Stelle  $(m_1h, m_2h)$  zeigt man die Ungleichung  $\frac{1}{2\pi} \left| \ln \frac{|lh-x|}{|lh-mh|} \right| \leq C_4 \frac{h}{|lh-mh|}$  und nach der Beweisführung von Satz 1.2 gilt

$$S_2 \leq C_4 \|f\|_{L_\infty(G_M)} \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq l}} \frac{h}{|lh - mh|} h^2 \leq C_5 (\text{diam}(G_h)) h \|f\|_{L_\infty(G_M)}. \quad (3.7)$$

Dabei ist  $\|f\|_{L_\infty(G_M)} = \text{vrai max}_{x \in G_M} |f(x)|$ . Weiterhin folgt aus Lemma 1.6

$$\left| \int_{W(lh)} E(lh - x) f(x) dx \right| \leq C_6 h^2 |\ln h| \|f\|_{L_\infty(G_M)}. \quad (3.8)$$

Für  $f \in C^{0,\alpha}(G_M)$  ergibt sich unter Berücksichtigung von  $\|f\|_{L_\infty(G_M)} \leq \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)}$  und  $\|f_h\|_{C(G_h)} \leq \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)}$  aus den Beziehungen (3.1) – (3.5), (3.7) und (3.8) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |V_h f_h(lh) - V f(lh)| &\leq (C_1 h^2 |\ln h| + C_2 (\text{diam}(G_h)) h + C_3 h^\alpha) \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)} \\ &\leq C h^\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei die rechte Seite nicht vom speziell betrachteten Gitterpunkt  $lh \in G_h$  abhängt.

Auf Grund der Eigenschaft (3.6) kann für Riemann-integrierbare Funktionen aus  $L_\infty(G_M)$  nur Konvergenz ohne Geschwindigkeit gezeigt werden ■

**Bemerkung 3.2:** Der Beweis von Satz 3.7 kann auf analoge Weise geführt werden, wenn das bisher betrachtete Gebiet  $G_M$  durch das Ausgangsgebiet  $G$  ersetzt wird. Dabei sei  $K = \{(0, 0); (1, 0); (-1, 0); (0, 1); (0, -1)\}$  und  $G = \bigcup_{m \in M} W^*(mh)$  mit

$$W^*(mh) = \begin{cases} W(mh) & \text{für } m \in M \setminus \gamma^+ \\ (W(mh) \cup W(r_m h)) \cap G & \text{für } m \in \gamma^+ \text{ und } r_m = (m + k) \in \gamma^-, k \in K. \end{cases}$$

Während bei den Abschätzungen (3.5) – (3.7) nur die Ungleichung  $\int_{W^*(mh)} dx \leq C h^2$  zu berücksichtigen ist, gelangt man zur Abschätzung (3.8), indem man im Beweis von Lemma 1.6 beim Übergang zu Polarkoordinaten  $0 \leq \varrho \leq \sqrt{2}h$  wählt.

Das folgende Konvergenzresultat im Raum  $l_p(G_h)$  mit  $1 \leq p < \infty$  kann unmittelbar mit Hilfe der Beziehung (3.9) bewiesen werden.

**Satz 3.8:** *Ist die Funktion  $f(x)$  aus  $L_\infty(G_M)$  und Riemann-integrierbar, dann gilt  $\|V_h f_h - V f\|_{l_p(G_h)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Im Fall  $f \in C^{0,\alpha}(G_M)$  mit  $0 < \alpha \leq 1$  erhält man die Abschätzung*

$$\|V_h f_h - V f\|_{l_p(G_h)} \leq C((A(G_h))^{1/p}) h^\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)}.$$

Im folgenden wird die Differenz zwischen dem fortgesetzten diskreten Potential und dem kontinuierlichen Volumenpotential in den Räumen  $C(G_M)$  und  $L_p(G_M)$  mit  $1 \leq p < \infty$  abgeschätzt. Da aus dem Zusammenhang eindeutig hervorgeht, ob die diskrete Fundamentallösung oder deren Fortsetzung betrachtet wird, soll auf die Einführung eines neuen Symbols verzichtet werden.

**Satz 3.9:** *Für Riemann-integrierbare Funktionen  $f(x)$  aus dem Raum  $L_\infty(G_M)$  gilt  $\|V_h f_h - V f\|_{C(G_M)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Im Fall  $f \in C^{0,\alpha}(G_M)$  ergibt sich*

$$\|V_h f_h - V f\|_{C(G_M)} \leq C h^\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)}.$$

**Beweis:** Es sei  $y \in G_M$  ein beliebiger Punkt,  $M_y = \{m \in M : |y - mh| < \sqrt{2}h\}$  und  $\text{diam}(G_M) = \max_{x,z \in G_M} |x - z|$ . In Analogie zu (3.1) erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m \in M} E_h^2(y - mh) f_h(mh) h^2 - \int_{G_M} E(y - x) f(x) dx \right| \\ & \leq \sum_{m \in M_y} |E_h^2(y - mh)| |f_h(mh)| h^2 + \sum_{m \in M \setminus M_y} |E_h^2(y - mh) - E(y - mh)| |f_h(mh)| h^2 \\ & + \sum_{m \in M \setminus M_y} \left| E(y - mh) f_h(mh) h^2 - \int_{W(mh)} E(y - x) f(x) dx \right| + \left| \sum_{m \in M_y} \int_{W(mh)} E(y - x) f(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Da die Menge  $M_y$  aus maximal sieben Elementen besteht, folgt für  $h \leq e^{-1}$  aus Lemma 1.3 die Beziehung  $\sum_{m \in M_y} |E_h^2(y - mh)| |f_h(mh)| h^2 \leq C_1 h^2 |\ln h| \|f\|_{L_\infty(G_M)}$ .

In den Punkten  $m \in M \setminus M_y$  gilt  $|y - mh| \geq |nh|$  mit  $n = (n_1, n_2)$ ,  $n_1 = [\frac{|y_1|}{h} - m_1]$ ,  $n_2 = [\frac{|y_2|}{h} - m_2]$  und  $0 < |nh| \leq \text{diam}(G_M)$ . Dabei wird mit  $[\frac{|y_i|}{h} - m_i]$ ,  $i = 1, 2$  der ganze Teil der Zahl  $|\frac{y_i}{h} - m_i|$  bezeichnet. In Analogie zu (3.3) erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in M \setminus M_y} |E_h^2(y - mh) - E(y - mh)| |f_h(mh)| h^2 \leq C_2 \sum_{m \in M \setminus M_y} \frac{h}{|y - mh|} h^2 \|f\|_{L_\infty(G_M)} \\ & \leq C_2 \sum_{n: 0 < |nh| \leq \text{diam}(G_M)} \frac{h}{|nh|} h^2 \|f\|_{L_\infty(G_M)} \leq C_3 (\text{diam}(G_M)) h \|f\|_{L_\infty(G_M)}. \end{aligned}$$

Aus der Abschätzung  $\sum_{m \in M \setminus M_y} |E(y - mh) f_h(mh) h^2 - \int_{W(mh)} E(y - x) f(x) dx| \leq S_1 + S_2$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad S_1 &= \sum_{m \in M \setminus M_y} \left| \int_{W(mh)} E(y - mh) (f_h(mh) - f(x)) dx \right| \\ \text{und} \quad S_2 &= \sum_{m \in M \setminus M_y} \int_{W(mh)} |E(y - mh) - E(y - x)| |f(x)| dx \end{aligned}$$

folgt für Riemann-integrierbare Funktionen  $f \in L_\infty(G_M)$

$$S_1 \leq \sup_{m \in M \setminus M_y} \left( \sup_{x \in W(mh)} |f(x)| - \inf_{x \in W(mh)} |f(x)| \right) \sum_{m \in M \setminus M_y} |E(y - mh)| h^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Für  $f \in C^{0,\alpha}(G_M)$  gilt in Analogie zu (3.5) und (3.7)  $S_1 \leq C_4 h^\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)}$  und  $S_2 \leq C_5 (\text{diam}(G_M)) h \|f\|_{L_\infty(G_M)}$ . Dabei wird zur Abschätzung von  $S_2$  die für alle  $m \in M \setminus M_y$  geltende Ungleichung  $|y - mh| \geq h$  verwendet. Aus Lemma 1.6 ergibt sich die Beziehung  $\left| \sum_{m \in M_y} \int_{W(mh)} E(y - x) f(x) dx \right| \leq C_6 h^2 |\ln h| \|f\|_{L_\infty(G_M)}$ , wenn

beim Übergang zu Polarkoordinaten  $0 \leq \varrho \leq \sqrt{2}h + \frac{\sqrt{2}}{2}h$  gewählt wird. Unter Verwendung der Ungleichung  $\|f\|_{L_\infty(G_M)} \leq \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)}$  resultiert die Behauptung des Satzes im Fall  $f \in C^{0,\alpha}(G_M)$  unmittelbar aus der punktweisen Abschätzung

$$\left| \sum_{m \in M} E_h^2(y - mh) f_h(mh) h^2 - \int_{G_M} E(y - x) f(x) dx \right| \leq C h^\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)} \quad \blacksquare$$

Auf der Grundlage dieser Ungleichung kann auch das folgende Konvergenzresultat im Raum  $L_p(G_M)$  mit  $1 \leq p < \infty$  bewiesen werden.

**Satz 3.10:** *Ist die Funktion  $f(x)$  aus  $L_\infty(G_M)$  und Riemann-integrierbar, dann gilt  $\|V_h f_h - V f\|_{L_p(G_M)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Bezeichnet man mit  $A(G_M)$  den Flächeninhalt des Gebietes  $G_M$ , dann erhält man für  $f \in C^{0,\alpha}(G_M)$  mit  $0 < \alpha \leq 1$  die Abschätzung*

$$\|V_h f_h - V f\|_{L_p(G_M)} \leq C ((A(G_M))^{1/p}) h^\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}(G_M)}.$$

Im Mittelpunkt der folgenden Untersuchungen steht das Potential der Einfachschicht. Vorausgesetzt wird beim Abschätzen der Differenz zwischen dem diskreten Potential  $(P_h^E v_h)(y) = \sum_{r \in \gamma^-} v_h(rh) E_h^2(y - rh) h$  und dem kontinuierlichen Potential  $(P^E v)(y) = \int_{\Gamma^D} v(x) E(y - x) dx$ , daß in den Punkten  $rh \in \gamma_h^-$   $v(rh) = v_h(rh)$  gilt. Zusätzlich wird die Bezeichnung  $R = \{(r_1, r_2) : r_1, r_2 \in \mathbb{Z}, rh \in \Gamma_h\}$  eingeführt.

**Satz 3.11:** Ist die Dichte  $v$  des Einfachschichtpotentials  $P^E v$  aus  $L_\infty(\Gamma^D)$  und Riemann-integrierbar, dann gilt  $\|P_h^E v_h - P^E v\|_{c(\gamma_h^-)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Im Fall  $v \in C^{0,\alpha}(\Gamma^D)$  mit  $0 < \alpha \leq 1$  erhält man die Abschätzung

$$\|P_h^E v_h - P^E v\|_{c(\gamma_h^-)} \leq C(h |\ln h| + h^\alpha) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}.$$

**Beweis:** In allen Randpunkten  $rh \in \Gamma_h$  sei  $U(rh) = \Gamma^D \cap W(rh)$ . Definiert man  $v_h(rh) = v(rh)$  auch in den Punkten  $rh \in \Gamma_h \setminus \gamma_h^-$ , dann gilt in jedem einzelnen Gitterpunkt  $lh \in \gamma_h^-$

$$\begin{aligned} |(P_h^E v_h - P^E v)(lh)| &\leq |v_h(lh) E_h^2(0) h| + \sum_{\substack{r \in R \\ r \neq l}} |v_h(rh)| |E_h^2(lh - rh) - E(lh - rh)| h \\ &\quad + \sum_{\substack{r \in R \\ r \neq l}} |v_h(rh) E(lh - rh) h - \int_{U(rh)} v(x) E(lh - x) dx| \\ &\quad + \left| \int_{U(lh)} v(x) E(lh - x) dx \right| + \left| \sum_{r \in R \setminus \gamma^-} v_h(rh) E_h^2(lh - rh) h \right|. \end{aligned}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite kann in Analogie zu (3.2) abgeschätzt werden durch  $|v_h(lh) E_h^2(0) h| \leq C_1 h |\ln h| \|v_h\|_{c(\Gamma_h)}$ . Die Schrittweite  $h$  sollte man immer so wählen, daß für zwei beliebige Randpunkte  $kh, jh \in \Gamma_h : kh \neq jh$  die Beziehung  $|kh - jh| \geq h$  erfüllt ist. In diesem Fall folgt aus Lemma 1.7

$$\sum_{\substack{r \in R \\ r \neq l}} |v_h(rh)| |E_h^2(lh - rh) - E(lh - rh)| h \leq C_2 h |\ln h| \|v_h\|_{c(\Gamma_h)}.$$

Aus der Ungleichung  $\sum_{\substack{r \in R \\ r \neq l}} |v_h(rh) E(lh - rh) h - \int_{U(rh)} v(x) E(lh - x) dx| \leq S_1 + S_2$

$$\begin{aligned} \text{mit } S_1 &= \sum_{\substack{r \in R \\ r \neq l}} \left| \int_{U(rh)} (v_h(rh) - v(x)) E(lh - rh) dx \right| \\ \text{und } S_2 &= \sum_{\substack{r \in R \\ r \neq l}} \int_{U(rh)} |v(x)| |E(lh - rh) - E(lh - x)| dx \end{aligned}$$

resultiert im Fall  $v \in C^{0,\alpha}(\Gamma^D)$

$$S_1 \leq \sum_{\substack{r \in R \\ r \neq l}} \left( \sup_{\substack{x \in U(rh) \\ x \neq rh}} \frac{|v_h(rh) - v(x)|}{|rh - x|^\alpha} \left( \frac{h}{2} \right)^\alpha \right) |E(lh - rh)| h \leq C_3 h^\alpha \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)},$$

da die Summe  $\sum_{\substack{r \in R \\ r \neq l}} |E(lh - rh)| h$  auf Grund der Existenz des Parameterintegrals

$\int_{\Gamma^D} |E(lh - x)| dx$  bezüglich  $h$  und  $y = lh$  gleichmäßig abgeschätzt werden kann.

Gesichert ist die Existenz dieses Integrals, da außerhalb von  $U(lh)$  der Integrand



beschränkt ist und für  $x \in U(lh)$  die Abschätzung aus Lemma 1.8 verwendet werden kann. Für Riemann– integrierbare Funktionen  $v \in L_\infty(\Gamma^D)$  gilt

$$S_1 \leq \sup_{\substack{r \in R \\ r \neq l}} \left( \sup_{x \in U(rh)} |v(x)| - \inf_{x \in U(rh)} |v(x)| \right) \sum_{\substack{r \in R \\ r \neq l}} |E(lh - rh)| h \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Der Ausdruck  $S_2$  kann mittels Taylorentwicklung so umgeformt werden, daß aus dem Beweis von Lemma 1.7 die Beziehung  $S_2 \leq C_4 h |\ln h| \|v\|_{L_\infty(\Gamma^D)}$  folgt. Ferner gilt nach Lemma 1.8  $|\int_{U(lh)} v(x) E(lh - x) dx| \leq C_5 h |\ln h| \|v\|_{L_\infty(\Gamma^D)}$  und ausgehend von der in Lemma 1.3 bewiesenen Eigenschaft der diskreten Fundamentallösung erhält man  $|\sum_{r \in R \setminus \gamma^-} v_h(rh) E_h^2(lh - rh) h| \leq C_6 h |\ln h| \|v_h\|_{C(\Gamma_h)}$ . Aus den Beziehungen  $\|v_h\|_{C(\Gamma_h)} \leq \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}$  und  $\|v\|_{L_\infty(\Gamma^D)} \leq \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}$  resultiert daher für  $h \leq e^{-1}$  die punktweise Abschätzung

$$|(P_h^E v_h - P^E v)(lh)| \leq \left( C_7 h |\ln h| + C_8 h^\alpha \right) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}, \quad (3.10)$$

aus der sich unmittelbar die Behauptung des Satzes ergibt ■

Mit Hilfe der Ungleichung (3.10) kann auch das folgende Konvergenzresultat im Raum  $l_p(\gamma_h^-)$  mit  $1 \leq p < \infty$  bewiesen werden.

**Satz 3.12:** *Ist die Dichte  $v$  des Einfachschichtpotentials  $P^E v$  aus  $L_\infty(\Gamma^D)$  und Riemann– integrierbar, dann gilt  $\|P_h^E v_h - P^E v\|_{l_p(\gamma_h^-)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Im Fall  $v \in C^{0,\alpha}(\Gamma^D)$  mit  $0 < \alpha \leq 1$  erhält man die Abschätzung*

$$\|P_h^E v_h - P^E v\|_{l_p(\gamma_h^-)} \leq C((B(\Gamma^D))^{1/p}) (h |\ln h| + h^\alpha) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}.$$

**Bemerkung 3.3:** Die in den Sätzen 3.11 und 3.12 formulierten Aussagen gelten auch dann, wenn das bisher betrachtete Einfachschichtpotential  $(P_h^E v_h)(lh)$  durch  $(P_h^{E_m} v_h)(lh) = \sum_{r \in \gamma^-} (v_h(rh) - S v_h) E_h^2(lh - rh) h + S v_h$  mit  $S v_h = (\sum_{s \in \gamma^-} h)^{-1} \sum_{s \in \gamma^-} v_h(sh) h$  und das Potential  $(P^E v)(lh)$  durch  $(P^{E_m} v)(lh) = \int_{\Gamma^D} (v(x) - T v) E(lh - x) dx + T v$  mit  $T v = (\int_{\Gamma^D} dy)^{-1} \int_{\Gamma^D} v(y) dy$  ersetzt wird. Wie die Differenz dieser Potentiale konkret abgeschätzt werden kann, soll im folgenden gezeigt werden.

Es sei  $B_1 = |S v_h - T v|$  und  $B_2 = |S v_h \sum_{r \in \gamma^-} E_h^2(lh - rh) h - T v \int_{\Gamma^D} E(lh - x) dx|$ .

Aus der Ungleichung (3.10) resultiert die Beziehung

$$\begin{aligned} |(P_h^{E_m} v_h - P^{E_m} v)(lh)| &\leq |(P_h^E v_h - P^E v)(lh)| + B_1 + B_2 \\ &\leq \left( C_1 h |\ln h| + C_2 h^\alpha \right) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)} + B_1 + B_2. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
B_1 &\leq |(\sum_{s \in \gamma^-} h)^{-1} - (\int_{\Gamma^D} dy)^{-1}| |\sum_{s \in \gamma^-} v_h(sh) h| \\
&\quad + |(\int_{\Gamma^D} dy)^{-1}| \left( |\sum_{s \in R} v_h(sh) h - \int_{\Gamma^D} v(y) dy| + |\sum_{s \in R \setminus \gamma^-} v_h(sh) h| \right) \\
&\leq C_1(B(\Gamma^D)) h \|v_h\|_{c(\Gamma_h)} + C_2(B(\Gamma^D)) \left( \sum_{s \in R} \int_{U(sh)} \frac{|v_h(sh) - v(y)|}{|sh - y|^\alpha} \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha dy \right) \\
&\leq C_1(B(\Gamma^D)) h \|v_h\|_{c(\Gamma_h)} + C_3(B(\Gamma^D)) h^\alpha \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)} \leq C_4(B(\Gamma^D)) h^\alpha \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}.
\end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung, der Existenz des Kurvenintegrals  $\int_{\Gamma^D} |E(lh - x)| dx$  und der Ungleichung (3.10) folgt ferner

$$\begin{aligned}
B_2 &\leq |Sv_h| |\sum_{r \in \gamma^-} E_h^2(lh - rh) h - \int_{\Gamma^D} E(lh - x) dx| + B_1 |\int_{\Gamma^D} E(lh - x) dx| \\
&\leq \|v_h\|_{c(\Gamma_h)} (C_1 h |\ln h| + C_2 h^\alpha) + C_3(B(\Gamma^D)) h^\alpha \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)} \\
&\leq (C_4 h |\ln h| + C_5 h^\alpha) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}.
\end{aligned}$$

Betrachtet man das diskrete Einfachschichtpotential nicht nur in den Gitterpunkten  $lh \in \gamma_h^-$ , sondern in allen Randpunkten  $y \in \Gamma^D$ , dann erhält man das folgende Konvergenzresultat:

**Satz 3.13:** *Ist die Dichte  $v$  des Potentials der Einfachschicht  $P^E v$  aus  $L_\infty(\Gamma^D)$  und Riemann-integrierbar, dann gilt  $\|P_h^E v_h - P^E v\|_{C(\Gamma^D)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  und  $\|P_h^E v_h - P^E v\|_{L_p(\Gamma^D)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  und  $1 \leq p < \infty$ . Für  $v \in C^{0,\alpha}(\Gamma^D)$  mit  $0 < \alpha \leq 1$  erhält man die Abschätzungen*

$$\begin{aligned}
\|P_h^E v_h - P^E v\|_{C(\Gamma^D)} &\leq C(h |\ln h| + h^\alpha) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)} \quad \text{und} \\
\|P_h^E v_h - P^E v\|_{L_p(\Gamma^D)} &\leq C((B(\Gamma^D))^{1/p}) (h |\ln h| + h^\alpha) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}.
\end{aligned}$$

Auf Grund der Analogie zu den bisherigen Betrachtungen soll bei diesem Satz nur die Beweisidee erläutert werden. Ausgangspunkt ist die in jedem Randpunkt  $y \in \Gamma^D$  geltende Ungleichung

$$\begin{aligned}
|(P_h^E v_h - P^E v)(y)| &\leq \sum_{r \in R_y} |v_h(rh)| |E_h^2(y - rh)| h \\
&\quad + \sum_{r \in R \setminus R_y} |v_h(rh)| |E_h^2(y - rh) - E(y - rh)| h \\
&\quad + \sum_{r \in R \setminus R_y} |v_h(rh) E(y - rh) h - \int_{U(rh)} v(x) E(y - x) dx| \\
&\quad + |\sum_{r \in R_y} \int_{U(rh)} v(x) E(y - x) dx| + |\sum_{r \in R \setminus \gamma^-} v_h(rh) E_h^2(y - rh) h|.
\end{aligned}$$

Dabei sei  $R_y = \{r \in R : |y - rh| < h\}$ . Die Ausdrücke auf der rechten Seite kann man abschätzen, indem man die Beweisschritte von Satz 3.9 überträgt und gleichzeitig die Zwischenergebnisse aus dem Beweis von Satz 3.11 verwendet. Wird der vierte Summand mit Hilfe von Lemma 1.8 abgeschätzt, dann ist zu beachten, daß für alle  $x \in U(rh) : r \in R_y$  die Ungleichung  $|y - x| < |y - rh| + |rh - x| < \frac{3}{2}h$  erfüllt ist. Aus diesem Grund ist bei der im Beweis vorkommenden Integration über  $u$  als obere Schranke  $\frac{3}{2}h$  zu wählen.

Bisher wurde die Differenz zwischen dem diskreten Einfachschichtpotential und dem kontinuierlichen Potential nur auf dem Rand untersucht. Von besonderem Interesse ist jedoch auch das Konvergenzverhalten im Innern des betrachteten Gebietes, da unmittelbar aus dem diskreten Potentialansatz die Lösung  $u_h$  der Differenzgleichung bestimmt werden kann und auch die Lösung  $u$  der Differentialgleichung mit dem kontinuierlichen Einfachschichtpotential berechnet wird. Betrachtet man in diesem Zusammenhang noch einmal die Abbildung 1, dann gehören die folgenden Abschätzungen zum letzten Schritt des einleitend vorgestellten Konzeptes. Obwohl im weiteren die Differenz zweier harmonischer Funktionen abgeschätzt wird, kann das Maximumprinzip nicht angewendet werden. Ursache dafür ist die Tatsache, daß das diskrete Einfachschichtpotential diskret harmonisch ist, das klassische Einfachschichtpotential aber im kontinuierlichen Sinn harmonisch ist. Die Differenz der beiden Funktionen wird daher in der Regel weder diskret noch kontinuierlich harmonisch sein.

**Satz 3.14:** *Ist die Dichte  $v$  des Einfachschichtpotentials  $P^E v$  aus  $L_\infty(\Gamma^D)$  und Riemann-integrierbar, dann gilt  $\|P_h^E v_h - P^E v\|_{C(G_h)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Im Fall  $v \in C^{0,\alpha}(\Gamma^D)$  mit  $0 < \alpha \leq 1$  erhält man die Abschätzung*

$$\|P_h^E v_h - P^E v\|_{C(G_h)} \leq C(h |\ln h| + h^\alpha) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}.$$

**Beweis:** In jedem Gitterpunkt  $mh \in G_h$  gilt

$$\begin{aligned} |(P_h^E v_h - P^E v)(mh)| &\leq \sum_{r \in R} |v_h(rh)| |E_h^2(mh - rh) - E(mh - rh)| h \\ &\quad + \sum_{r \in R} |v_h(rh)| E(mh - rh) h - \int_{U(rh)} v(x) E(mh - x) dx \\ &\quad + \left| \sum_{r \in R \setminus \gamma^-} v_h(rh) E_h^2(mh - rh) h \right|. \end{aligned}$$

Ausgehend von Lemma 1.9 erhält man für den ersten Summanden

$$\sum_{r \in R} |v_h(rh)| |E_h^2(mh - rh) - E(mh - rh)| h \leq C_1 h |\ln h| \|v_h\|_{C(\Gamma_h)}.$$

Aus der Ungleichung  $\sum_{r \in R} |v_h(rh) E(mh - rh) h - \int_{U(rh)} v(x) E(mh - x) dx| \leq S_1 + S_2$

$$\text{mit } S_1 = \sum_{r \in R} \left| \int_{U(rh)} (v_h(rh) - v(x)) E(mh - rh) dx \right|$$

$$\text{und } S_2 = \sum_{r \in R} \int_{U(rh)} |v(x)| |E(mh - rh) - E(mh - x)| dx$$

und der gleichmäßigen Abschätzung der Summe  $\sum_{r \in R} |E(mh - rh)| h$  bezüglich  $h$  und  $y = mh$  resultiert für  $v \in L_\infty(\Gamma^D)$  die Beziehung

$$S_1 \leq \sup_{r \in R} \left( \sup_{x \in U(rh)} |v(x)| - \inf_{x \in U(rh)} |v(x)| \right) \sum_{r \in R} |E(mh - rh)| h \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Im Fall  $v \in C^{0,\alpha}(\Gamma^D)$  gilt

$$S_1 \leq \sum_{r \in R} \left( \sup_{\substack{x \in U(rh) \\ x \neq rh}} \frac{|v_h(rh) - v(x)|}{|rh - x|^\alpha} \left( \frac{h}{2} \right)^\alpha \right) |E(mh - rh)| h \leq C_2 h^\alpha \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}.$$

Mittels Taylorentwicklung wird der Ausdruck  $S_2$  so umgeformt, daß aus Lemma 1.9

$$S_2 \leq C_3 \|v\|_{L_\infty(\Gamma^D)} \sum_{r \in R} \frac{h}{|mh - rh|} h \leq C_4 h |\ln h| \|v\|_{L_\infty(\Gamma^D)}$$

folgt. Schließlich ergibt sich aus der im Lemma 1.3 bewiesenen Eigenschaft der diskreten Fundamentallösung die Ungleichung

$$\left| \sum_{r \in R \setminus \gamma^-} v_h(rh) E_h^2(mh - rh) h \right| \leq C_5 h |\ln h| \|v_h\|_{C(\Gamma_h)}.$$

Die Behauptung des Satzes ist eine unmittelbare Folgerung aus diesen punkweisen Abschätzungen ■

Gleichzeitig kann man im Raum  $l_p(G_h)$  mit  $1 \leq p < \infty$  das folgende Konvergenzresultat beweisen.

**Satz 3.15:** *Ist die Dichte  $v$  des Einfachschichtpotentials  $P^E v$  aus  $L_\infty(\Gamma^D)$  und Riemann-integrierbar, dann gilt  $\|P_h^E v_h - P^E v\|_{l_p(G_h)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Im Fall  $v \in C^{0,\alpha}(\Gamma^D)$  mit  $0 < \alpha \leq 1$  erhält man die Abschätzung*

$$\|P_h^E v_h - P^E v\|_{l_p(G_h)} \leq C((A(G_h))^{1/p})(h |\ln h| + h^\alpha) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}.$$

Im weiteren wird das diskrete Einfachschichtpotential nicht nur in den Gitterpunkten  $mh \in G_h$ , sondern in allen inneren Punkten  $z \in G_M$  betrachtet.

**Satz 3.16:** *Ist die Dichte des Einfachschichtpotentials  $P^E v$  aus  $L_\infty(\Gamma^D)$  und Riemann-integrierbar, dann gilt  $\|P_h^E v_h - P^E v\|_{C(G_M)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  und  $\|P_h^E v_h - P^E v\|_{L_p(G_M)} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  und  $1 \leq p < \infty$ . Im Fall  $v \in C^{0,\alpha}(\Gamma^D)$  mit  $0 < \alpha \leq 1$  erhält man die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \|P_h^E v_h - P^E v\|_{C(G_M)} &\leq C(h |\ln h| + h^\alpha) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)} \quad \text{und} \\ \|P_h^E v_h - P^E v\|_{L_p(G_M)} &\leq C((A(G_M))^{1/p}) (h |\ln h| + h^\alpha) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}. \end{aligned}$$

Der Beweis dieses Satzes soll nur kurz skizziert werden.

Ausgangspunkt ist die in jedem Punkt  $z \in G_M$  geltende Ungleichung

$$\begin{aligned} |(P_h^E v_h - P^E v)(z)| &\leq \sum_{r \in R_z} |v_h(rh)| |E_h^2(z - rh)| h \\ &\quad + \sum_{r \in R \setminus R_z} |v_h(rh)| |E_h^2(z - rh) - E(z - rh)| h \\ &\quad + \sum_{r \in R \setminus R_z} |v_h(rh) E(z - rh) h - \int_{U(rh)} v(x) E(z - x) dx| \\ &\quad + \left| \sum_{r \in R_z} \int_{U(rh)} v(x) E(z - x) dx \right| + \left| \sum_{r \in R \setminus \gamma^-} v_h(rh) E_h^2(z - rh) h \right|. \end{aligned}$$

Dabei sei  $R_z = \{r \in R : |z - rh| < \sqrt{2}h\}$ . Die Abschätzung der einzelnen Ausdrücke auf der rechten Seite erfolgt nach dem gleichen Prinzip wie in den vorhergehenden Sätzen. Eine obere Schranke für den ersten Summanden ergibt sich aus Lemma 1.3. Zur Bearbeitung des zweiten Summanden nutzt man die für alle  $r \in R \setminus R_z$  geltende Ungleichung  $|z - rh| \geq |nh|$  mit  $n = (n_1, n_2) : n_1 = \lfloor |\frac{z_1}{h} - r_1| \rfloor$ ,  $n_2 = \lfloor |\frac{z_2}{h} - r_2| \rfloor$  und  $0 < |nh| \leq \text{diam}(G_M)$ . Während für alle  $z \in G_M$  mit  $R_z = \emptyset$  nur die durch Lemma 1.9 erzielte Abschätzung aus dem Beweis von Satz 3.14 von Bedeutung ist, kann es im Fall  $R_z \neq \emptyset$  erforderlich sein, die entsprechende Ungleichung aus dem Beweis von Satz 3.11 zu verwenden. Insgesamt erhält man

$$\sum_{r \in R \setminus R_z} |v_h(rh)| |E_h^2(z - rh) - E(z - rh)| h \leq C h |\ln h| \|v_h\|_{C(\Gamma_h)}.$$

Der dritte Summand wird nach der bereits bekannten Vorschrift zerlegt. Bei der Abschätzung der in diesem Fall auftretenden Summanden  $S_1$  und  $S_2$  spielt sowohl die für alle  $r \in R \setminus R_y$  geltende Ungleichung  $|z - rh| \geq \sqrt{2}h \geq h$  als auch die in den Punkten  $x \in U(rh)$  erfüllte Beziehung  $|x - rh| \leq \frac{h}{2}$  eine wesentliche Rolle. Ferner kann der vierte Summand mit Hilfe von Lemma 1.8 abgeschätzt werden. Man beachte in diesem Zusammenhang die direkt im Anschluß an das Lemma 1.8 formulierte Bemerkung 1.2. Schließlich ergibt sich unmittelbar aus Lemma 1.3 eine obere Schranke für den letzten Summanden.

### 3.2.2 Konvergenz der diskreten Lösung

Es sei  $\Gamma$  der Rand des beschränkten Gebietes  $G$ . Betrachtet wird in diesem Abschnitt das innere Dirichletproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) & \forall x \in G \\ u(s) &= \varphi(s) & \forall s \in \Gamma, \end{aligned} \quad (3.11)$$

und das entsprechende Differenzenrandwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(mh) &= f_h(mh) & \forall mh \in G_h \\ u_h(rh) &= \varphi_h(rh) & \forall rh \in \gamma_h^-. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Anknüpfend an die bisherigen Überlegungen wird die Lösung  $u_h$  des Problems (3.12) in der Form  $u_h = u_h^1 + u_h^2$  dargestellt, wobei  $u_h^1$  eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h^1(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h \\ u_h^1(rh) &= \varphi_h^*(rh) & \forall rh \in \gamma_h^- \end{aligned} \quad (3.13)$$

mit  $\varphi_h^*(rh) = \varphi_h(rh) - \sum_{m \in M} E_h^2(rh - mh) f_h(mh) h^2$  ist. Der Summand  $u_h^2$  kann in den Gitterpunkten  $lh \in G_h \cup \gamma_h^-$  als bekannt vorausgesetzt werden, da er die Beziehung  $u_h^2(lh) = \sum_{m \in M} E_h^2(lh - mh) f_h(mh) h^2$  erfüllt. In Analogie dazu schreibt man die Lösung  $u$  des Problems (3.11) in der Form  $u = u^1 + u^2$ , so daß

$$\begin{aligned} -\Delta u^1(x) &= 0 & \forall x \in G \\ u^1(s) &= \varphi^*(s) & \forall s \in \Gamma \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit  $\varphi^*(s) = \varphi(s) - \int_{x \in G} E(s - x) f(x) dx$  und  $u^2(y) = \int_{x \in G} E(y - x) f(x) dx$  für alle  $y \in G \cup \Gamma$  gilt. Bereits bewiesen wurde die Konvergenz des diskreten Volumen- und Einfachschichtpotentials unter der Voraussetzung, daß sowohl  $f_h$  die Einschränkung der rechten Seite  $f$  aus dem Randwertproblem (3.11) als auch  $v_h$  die Einschränkung der Dichte  $v$  des kontinuierlichen Einfachschichtpotentials auf das Gitter  $\mathbb{R}_h^2$  ist. Für diese Einschränkungen der Funktionen  $f$  und  $v$  auf das Gitter sollen im folgenden die Bezeichnungen  $R_h f$  und  $R_h v$  verwendet werden.

Im Mittelpunkt steht nun die Frage nach der Konvergenz der diskreten Lösung  $u_h^1$  (bzw.  $u_h$ ) gegen die Lösung  $u^1$  (bzw.  $u$ ) des kontinuierlichen Problems. Betrachtet man als Ausgangspunkt für die Konvergenzuntersuchungen das Randgleichungssystem (2.6) aus dem Kapitel 2, dann ist zunächst zu zeigen, daß die Dichte  $v_h$  aus dem System (2.6) gegen die Dichte  $v$  aus der kontinuierlichen Randintegralgleichung konvergiert. Erst im Anschluß daran kann die Konvergenz der diskreten Lösung  $u_h^1$  gegen die Lösung  $u^1$  des kontinuierlichen Problems unter Verwendung der Potentialdarstellung bewiesen werden. Ein Konvergenzbeweis, der diese Schritte

realisiert, ist jedoch nicht unbedingt erforderlich, da ein enger Zusammenhang zwischen der Lösbarkeit des Differenzenrandwertproblems und der Lösbarkeit des Randgleichungssystems besteht. Bereits bei RYABENKIJ findet man einen entsprechenden Äquivalenzsatz, bei dem jedoch keine Aufteilung des Differenzenpotentials in ein diskretes Einfach- und Doppelschichtpotential erfolgt und dadurch ein überbestimmtes Gleichungssystem auf dem Rand entsteht. Um an dieser Stelle einen direkten Vergleich mit den Aussagen in Kapitel 2 zu ermöglichen, soll der Satz von RYABENKIJ für den hier betrachteten Spezialfall formuliert werden. Dabei sei  $(V_h f_h)(lh)$  das diskrete Volumenpotential und  $(P_h \xi)(lh) = \sum_{r \in \gamma} \left( \sum_{k \in K_r} E_h(lh - (r + k)h) a_k h^2 \right) \xi(rh)$  das von RYABENKIJ betrachtete Differenzenpotential.

**Satz 3.17:**  $\xi(rh)$  ist verallgemeinerte Spur der Lösung  $u_h(mh)$  der Differenzengleichung  $-\Delta_h u_h(mh) = f_h(mh) \quad \forall mh \in G_h$  genau dann, wenn  $\xi(rh)$  in allen Gitterpunkten  $rh \in \gamma_h = (\gamma_h^- \cup \gamma_h^+)$  die Gleichung  $\xi(rh) - (P_h \xi)(rh) = (V_h f_h)(rh)$  erfüllt. Ist die Gleichung  $\xi(rh) - (P_h \xi)(rh) = (V_h f_h)(rh)$  für alle  $rh \in \gamma_h$  erfüllt, dann existiert eine eindeutige Lösung  $u_h(mh)$  der Gleichung  $-\Delta_h u_h(mh) = f_h(mh)$ , deren Spur  $\xi(rh)$  ist. Die Lösung  $u_h(mh)$  kann mit Hilfe der Formel

$$u_h(mh) = (P_h \xi)(mh) + (V_h f_h)(mh) \quad \forall mh \in (G_h \cup \gamma_h)$$

dargestellt werden.

Im Kapitel 2 wird in den Sätzen 2.15 und 2.16 bewiesen, daß eine Lösung  $u_h^1$  des Problems (3.13) existiert, die mit dem diskreten Einfachschichtpotential

$$(P_h^{E_m} v_h)(lh) = \sum_{r \in \gamma^-} (v_h(rh) - S v_h) E_h^2(lh - rh) h + S v_h \quad \forall lh \in G_h \cup \gamma_h^-$$

dargestellt werden kann. Dabei ist  $S v_h = \left( \sum_{s \in \gamma^-} h \right)^{-1} \sum_{s \in \gamma^-} v_h(sh) h$ . Gleichzeitig wird im Abschnitt 2.2 gezeigt, daß das Randwertproblem (3.13) eindeutig lösbar ist. Auf Grund der Darstellung  $u_h = u_h^1 + u_h^2$  gelten die entsprechenden Aussagen auch für die Lösung  $u_h$  des Problems (3.12). Da die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung  $u_h$  gesichert ist, können die Konvergenzsätze von SAMARSKIJ direkt übernommen werden. Zwei dieser Sätze (vgl. [Sam] und [SLM]) sollen im folgenden zitiert werden.

**Satz 3.18:** Wenn die Lösung  $u(x)$  des Randwertproblems (3.11) in  $C^4(\bar{G})$  mit  $\bar{G} = G \cup \Gamma$  liegt und  $u_h$  die Lösung des Problems (3.12) ist, dann gilt

$$\|u(mh) - u_h(mh)\|_{C(G_h \cup \gamma_h^-)} \leq C h^2,$$

wobei die Konstante  $C$  nicht von  $h$  abhängt.

Andererseits ist eine Abschätzung im diskreten Sobolevraum  $w_2^1(G_h)$  mit der Norm  $\|u_h\|_{w_2^1(G_h)}^2 = \|\nabla u_h\|_{l_2(G_h)}^2 + \|u_h\|_{l_2(G_h)}^2$  möglich, wobei mit  $\nabla u_h$  bestimmte Differenzenableitungen erster Ordnung bezeichnet werden, die hier nicht näher charakterisiert werden sollen. Im Vergleich zum Satz 3.18 sind in diesem Fall die Glattheitsforderungen an die Lösung  $u(x)$  des Randwertproblems (3.11) wesentlich schwächer.

**Satz 3.19:** Wenn die Lösung  $u(x)$  des Randwertproblems (3.11) mit  $\varphi(s) = 0$  im Sobolevraum  $W_2^m(G)$  mit  $m = 2, 3$  liegt und  $u_h$  die Lösung des Problems (3.12) mit  $\varphi_h(rh) = 0$  ist, dann gilt

$$\|u(mh) - u_h(mh)\|_{w_2^1(G_h)} \leq C h^{m/2} \|u\|_{W_2^m(G)},$$

wobei die Konstante  $C$  nicht von  $h$  und  $u(x)$  abhängt.

Während der Satz 3.18 mit dem Maximumprinzip bewiesen werden kann, beruht der Satz 3.19 auf der Methode der energetischen Ungleichung.

Die Abschätzungen in diesem Kapitel beziehen sich ausschließlich auf die Lösung der diskreten Laplace- bzw. Poissongleichung. Dabei wird die erzielte Qualität der Resultate ganz entscheidend durch die Eigenschaften der diskreten Fundamentallösung geprägt. Werden analoge Aussagen für andere Randwertprobleme angestrebt, dann erscheint es zweckmäßig, das Konvergenzverhalten der entsprechenden diskreten Fundamentallösung genau zu studieren. Auf diesem Gebiet sind in der Literatur kaum Abschätzungen zu finden.

Die hier formulierten Sätze sind als erste Resultate hinsichtlich der Konvergenz zu betrachten. Weitere Untersuchungen bieten sich unmittelbar an, wobei hauptsächlich Abschätzungen in anderen Räumen von Interesse sind. Darüber hinaus fehlen sowohl Aussagen zum inneren Neumannproblem als auch zu äußeren Randwertproblemen.

Da nur das diskrete Einfachschichtpotential im Mittelpunkt der Untersuchungen steht, ist das ebenfalls im Kapitel 2 definierte Potential der Doppelschicht als ein wesentlicher Schwerpunkt bei der zukünftigen Konvergenzanalyse anzusehen.

Ein mit potentialtheoretischen Mitteln geführter Konvergenzbeweis für die diskrete Lösung  $u_h^1$  und der damit im Zusammenhang stehende Stabilitätsbeweis sollte als Ziel zukünftiger Untersuchungen betrachtet werden, da bei anderen Differenzenrandwertproblemen eventuell noch keine Konvergenz- und Stabilitätsaussagen vorliegen. An die Überlegungen zu Beginn dieses Abschnittes anknüpfend soll eine Möglichkeit zum Beweis der Konvergenz der diskreten Lösung vorgestellt werden, ohne daß dabei eine spezielle Wahl der Räume getroffen wird. Betrachtet wird das diskrete Potential der Einfachschicht  $(P_h^{E_m} v_h)(lh) = \sum_{r \in \gamma^-} (v_h(rh) - S v_h) E_h^2(lh - rh) h + S v_h$

mit  $S v_h = (\sum_{r \in \gamma^-} h)^{-1} \sum_{r \in \gamma^-} v_h(rh) h$  und das entsprechende kontinuierliche Potential

$$(P^{E_m} v)(s) = \int_{\Gamma^D} (v(x) - T v) E(s - x) dx + T v \quad \text{mit} \quad T v = \left( \int_{\Gamma^D} dy \right)^{-1} \int_{\Gamma^D} v(y) dy.$$

Ferner wird vorausgesetzt, daß für die rechte Seite  $\varphi_h$  aus dem Randgleichungssystem  $(P_h^{E_m} v_h)(lh) = \varphi_h(lh) \quad \forall lh \in \gamma_h^-$  und für die rechte Seite  $\varphi$  aus der entsprechenden Randintegralgleichung  $(P^{E_m} v)(s) = \varphi(s) \quad \forall s \in \Gamma$  die Beziehung  $\|R_h \varphi - \varphi_h\| \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  erfüllt ist, wobei mit  $R_h$  die Einschränkung auf das Gitter bezeichnet wird.



Kann man beweisen, daß die Folge der Operatoren  $(P_h^{E_m})^{-1} : \gamma_h^- \rightarrow \gamma_h^-$  gleichmäßig beschränkt ist, dann gilt für die Differenz der Dichten  $v_h$  und  $R_h v$  auf dem Rand  $\gamma_h^-$

$$\begin{aligned} \|R_h v - v_h\| &\leq \| (P_h^{E_m})^{-1} P_h^{E_m} (R_h v - v_h) \| \\ &\leq C \|P_h^{E_m} R_h v - \varphi_h\| \\ &\leq C ( \|P_h^{E_m} R_h v - R_h P^{E_m} v\| + \|R_h \varphi - \varphi_h\| ). \end{aligned}$$

Während der zweite Summand gegen Null konvergiert, sind Ausdrücke wie der erste Summand in der vorliegenden Arbeit abgeschätzt worden. Das einzige noch fehlende Resultat ist die gleichmäßige Beschränktheit der Operatoren  $(P_h^{E_m})^{-1} : \gamma_h^- \rightarrow \gamma_h^-$ . Auch die Wahl der Räume sollte davon abhängig gemacht werden, wo der Beweis dieser Eigenschaft geführt werden kann. Mit der obigen Abschätzung ist zunächst die Konvergenz der diskreten Dichte bewiesen. Betrachtet werden nun die Potentialoperatoren  $P_h^{E_m} : \gamma_h^- \rightarrow G_h$  und  $P^{E_m} : \Gamma \rightarrow G$ . Unter der Voraussetzung, daß die Folge der Operatoren  $P_h^{E_m} : \gamma_h^- \rightarrow G_h$  gleichmäßig beschränkt ist, erhält man mit Hilfe der Potentialdarstellung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u_h^1 - R_h u^1\| &= \|P_h^{E_m} v_h - R_h P^{E_m} v\| \\ &\leq \|P_h^{E_m} v_h - P_h^{E_m} R_h v\| + \|P_h^{E_m} R_h v - R_h P^{E_m} v\| \\ &\leq C \|v_h - R_h v\| + \|P_h^{E_m} R_h v - R_h P^{E_m} v\|. \end{aligned}$$

Während der erste Summand auf Grund der Konvergenz der diskreten Dichte gegen Null konvergiert, sind bereits Abschätzungen, wie sie für den zweiten Summanden notwendig sind, in der vorliegenden Arbeit enthalten. Insgesamt ist damit die Konvergenz der diskreten Lösung bewiesen.

Es erscheint sinnvoll, sich bei allen diesen Überlegungen zunächst auf Sobolevräume zu konzentrieren. Wesentlich ist in Analogie zum Satz 3.19 die Voraussetzung, daß die Lösung  $u$  aus dem Raum  $W_2^2(G)$  ist, damit auf Grund von Spur- und Einbettungssatz die Werte auf dem Rand existieren.

# Kapitel 4

## Numerisch erzielte Resultate

Im Unterschied zu den Näherungsverfahren von RYABENKIJ bilden die im Kapitel 2 im Zusammenhang mit der Laplacegleichung formulierten Sätze zur Lösung von diskreten Randwertproblemen eine unmittelbare Grundlage für numerische Berechnungen. Eine wesentliche Rolle bei der Erstellung des jeweiligen Randgleichungssystems spielt die diskrete Fundamentallösung (1.2), die ausgehend von der Summenformel aus dem Abschnitt 1.2.1 bestimmt wird. Die Lösung des Randgleichungssystems erfolgt mit dem Programmpaket *Matlab*.

In den hier betrachteten Beispielen wurde hauptsächlich der  $l_2$ -Fehler auf dem Rand und im Innern des Gebietes beziehungsweise in einem bestimmten Teilgebiet des Außengebietes bestimmt. Darüber hinaus wird das Verhalten der diskreten Lösung durch die  $c$ -Norm charakterisiert.

Während im allgemeinen auf einem PC 486/DX66-2 gearbeitet wurde, erforderten die Rechnungen mit mehr als 800 Randgitterpunkten den Einsatz eines PC 586/90. Die Lösung der einzelnen Probleme erfolgte mit einfacher Rechengenauigkeit, lediglich bei der von EHRHARDT durchgeführten Berechnung der diskreten Fundamentallösung war aus Stabilitätsgründen eine Erhöhung der Genauigkeit notwendig. Betont sei, daß mit dem in Turbo Pascal geschriebenen Programm bisher nur experimentiert wurde. Dabei ist der Optimierung der Rechenzeit keine Beachtung geschenkt worden, so daß auf Zeitangaben verzichtet werden soll.

Im Unterschied zu den gebietsorientierten Verfahren lassen sich diskrete Randwertprobleme in Außengebieten mit potentialtheoretischen Methoden auf einfache Weise bearbeiten. Insbesondere kann die Lösung in beliebig weit vom Rand entfernten Gitterpunkten angegeben werden, ohne daß die Einführung eines künstlichen Randes oder ein Abschneiden erforderlich ist.

Anhand von zwei Testrechnungen soll ein Eindruck von der Qualität der Lösungen bei Vorgabe fast singulärer Randwerte entstehen.

## 4.1 Lösung innerer Randwertprobleme

### Beispiel 1:

Für das in Abbildung 5 dargestellte Gebiet wurde die Lösung des inneren Dirichletproblems

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h \\ u_h(rh) &= \varphi_h(rh) & \forall rh \in \gamma_h^- \end{aligned}$$

mit den Randwerten

$$\varphi_h(r_1 h, r_2 h) = 4(r_1 h - r_2 h)$$

berechnet.

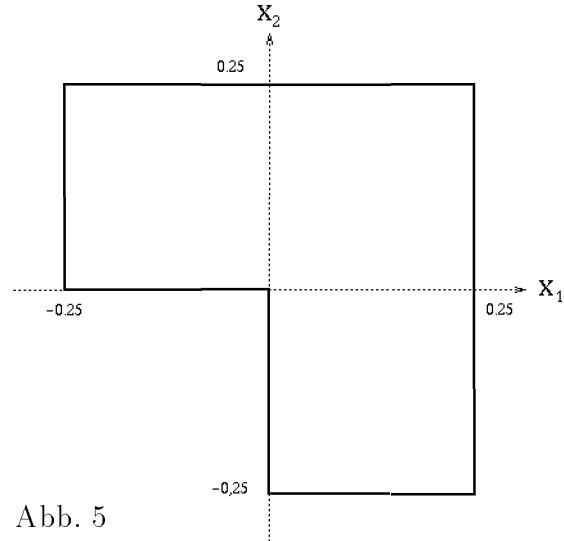


Abb. 5

Charakteristisch für dieses Beispiel ist, daß die im Mittelpunkt stehende Funktion  $u(x_1, x_2) = 4(x_1 - x_2)$  sowohl die Differentialgleichung in jedem Punkt des Gebietes, als auch die Differenzengleichung  $-\Delta_h u(mh) = 0$  in den Gitterpunkten  $mh \in G_h$  erfüllt. Aus diesem Grund ist das Lösungsverhalten sehr leicht nachvollziehbar.

Die Tabelle 4 enthält eine Zusammenfassung der durch mehrfaches Halbieren der Schrittweite  $h = 0.015625$  erzielten Resultate. Dabei wird vordergründig der in der Nähe der Innenecke liegende Gitterpunkt  $x^* = (0.015625, 0.015625)$  ausgewertet. Die diskreten Normalableitungen auf dem Rand  $\gamma_h^-$  werden in Analogie zu Kapitel 2 mit  $\psi_h(rh)$  bezeichnet.

Anzahl der Gitterpunkte auf $\gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $\psi_h(rh)$ , $rh \in \gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h$	$ u(x^*) - u_h(x^*) $	$ \Delta_h u_h(x^*) $
123	1.43-10	8.76-12	6.70-12	1.49-7
251	3.56-10	1.19-11	4.79-12	7.22-7
507	9.93-10	1.70-11	1.23-11	4.48-6
1019	2.81-9	2.39-11	2.15-11	2.63-5

Tab.4

Bei der Auswertung der Ergebnisse ist zu berücksichtigen, daß die Genauigkeit der Resultate durch die Rechengenauigkeit beeinflusst wird. Deshalb ist es anhand der hier berechneten Fehlernormen nicht möglich, eine qualitative Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit zu treffen.

Die  $c$ - Norm der Lösung verdeutlicht, daß mit dem diskreten Einfachschichtpotential auch in der Nähe des Randes  $\gamma_h^-$  hinreichend genau gerechnet werden kann. Im

Vergleich zur klassischen Potentialtheorie besteht der Vorteil im diskreten Fall darin, daß die diskrete Fundamentallösung bei beliebiger, fest gewählter Schrittweite  $h$  im Koordinatenursprung keine Singularität besitzt.

Anzahl Gitterpunkte auf $\gamma_h^-$	$c$ -Norm der Lösung		
	$\forall rh \in \gamma_h^-$	$\forall rh \in \gamma_h^+$	$\forall mh \in G_h$
123	1.9375	1.8750	1.8750
251	1.9688	1.9375	1.9375
507	1.9844	1.9688	1.9688
1019	1.9922	1.9844	1.9844

Tab.5

Untersucht wurde auch das entsprechende Neumannproblem, so daß ein direkter Vergleich zwischen den Ergebnissen möglich ist.

### Beispiel 2:

Für das in Abbildung 5 dargestellte Gebiet war die Lösung des Differenzenrandwertproblems

$$\begin{aligned}
 -\Delta_h u_h(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h \\
 u_A(rh) &= h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_r} (u_h(rh) - u_h((r+k)h)) = \psi_h(rh) & \forall rh \in \gamma_h^-
 \end{aligned}$$

mit den diskreten Normalableitungen  $\psi_h(rh) = 4(n_1(rh) - n_2(rh))$  zu bestimmen. Dabei sind  $n_1(rh)$  und  $n_2(rh)$  die Komponenten des äußeren Normalenvektors  $\vec{n}(rh)$  im Gitterpunkt  $rh$  bezüglich der Koordinatenachsen.

Die Tabellen 6 und 7 geben einen Überblick über das Lösungsverhalten. Die im Kapitel 2 formulierte notwendige Bedingung (2.1) für die Lösbarkeit des Neumannproblems ist bei den einzelnen Rechnungen automatisch erfüllt.

Anzahl der Gitterpunkte auf $\gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $u_h(rh)$ , $rh \in \gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h$	$ u(x^*) - u_h(x^*) $	$ \Delta_h u_h(x^*) $
123	3.97-10	4.66-10	2.95-10	2.02-7
251	1.24-9	1.42-9	9.97-10	1.31-6
507	4.83-9	5.72-9	4.37-9	1.39-6
1019	4.28-9	4.94-9	3.64-9	2.36-5

Tab.6  $x^* = (0.015625, 0.015625)$

Beide Beispiele zeigen, daß durch das Vorhandensein von Innenecken keine zusätzlichen numerischen Probleme auftreten, da diese Ecken bei dem hier gewählten Lösungsverfahren direkt mit berücksichtigt werden.

Anzahl Gitter- punkte auf $\gamma_h^-$	$c$ -Norm der Lösung		
	$\forall rh \in \gamma_h^-$	$\forall rh \in \gamma_h^+$	$\forall mh \in G_h$
123	1.9375	1.8750	1.8750
251	1.9687	1.9375	1.9375
507	1.9844	1.9687	1.9687
1019	1.9922	1.9844	1.9844

Tab.7

Im folgenden werden zwei Randwertprobleme vorgestellt, bei denen das betrachtete Gebiet die Form eines Doppel- T- Profils besitzt. Ausgewählt wurden diese Beispiele auf Grund des praktisch interessanten Modells.

### Beispiel 3:

In dem in Abbildung 6 skizzierten Gebiet  $G$  war ursprünglich die Lösung des inneren Dirichletproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0 & \forall x \in G \\ u(z) &= \varphi(z) & \forall z \in \Gamma \end{aligned}$$

mit  $\varphi(z_1, z_2) = \sin(z_1) * \exp(z_2)$  zu bestimmen. Um mit der Methode der Differenzenpotentiale arbeiten zu können, wurde das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h \\ u_h(rh) &= \varphi_h(rh) & \forall rh \in \gamma_h^- \end{aligned}$$

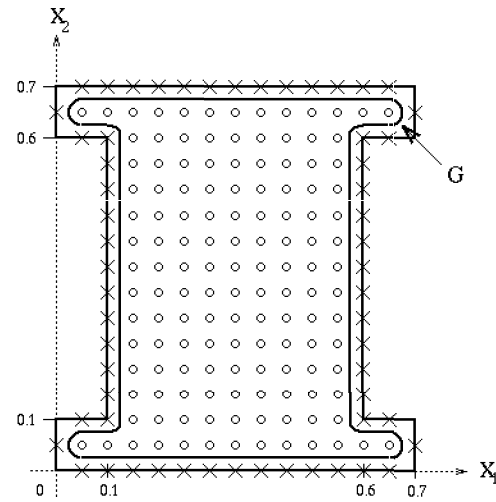


Abb. 6

mit den auf dem Gitter gegebenen Randwerten  $\varphi_h(r_1h, r_2h) = \sin(r_1h) * \exp(r_2h)$  betrachtet. Der Übergang vom Gebiet  $G$  zum diskreten Gebiet  $G_h$  ist in Abbildung 6 skizziert, wobei für eine fest gewählte Schrittweite  $h$  alle zu  $G_h$  gehörenden Gitterpunkte mit einem Kreis und alle zu  $\gamma_h^-$  gehörenden Punkte mit einem Kreuz gekennzeichnet sind. Bei der Auswertung der Ergebnisse ist zu berücksichtigen, daß  $u(x_1, x_2) = \sin(x_1) * \exp(x_2)$  eine Lösung der Differentialgleichung ist, während die Gleichung  $-\Delta_h u(mh) = 0$  nur näherungsweise erfüllt ist.

Anzahl der Gitterpunkte auf $\gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $\psi_h(rh)$ , $rh \in \gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h$	$ u(x^*) - u_h(x^*) $	$ - \Delta_h u_h(x^*) $
120	7.47-3	1.30-6	1.28-6	1.02-8
248	3.81-3	3.14-7	3.20-7	2.91-8
504	1.92-3	7.73-8	8.00-8	2.33-8
1016	9.66-4	1.92-8	2.00-8	1.68-6

Tab.8

$$x^* = (0.4, 0.4)$$

Aus den Werten in Tabelle 8 wurde eine Konvergenzgeschwindigkeit von  $O(h^2)$  berechnet.

Anzahl Gitterpunkte auf $\gamma_h^-$	$c$ -Norm der Lösung		
	$\forall rh \in \gamma_h^-$	$\forall rh \in \gamma_h^+$	$\forall mh \in G_h$
120	1.2653	1.2273	1.2273
248	1.2812	1.2621	1.2621
504	1.2892	1.2796	1.2796
1016	1.2932	1.2884	1.2884

Tab.9

#### Beispiel 4:

Untersucht wurde das zum Beispiel 3 gehörende innere Neumannproblem. Die zunächst natürlich erscheinende Diskretisierung der Normalableitungen in der Form  $\psi_h^*(rh) = \exp(r_2h) (\cos(r_1h) n_1(rh) + \sin(r_1h) n_2(rh))$  erwies sich als unbrauchbar, da die notwendige Bedingung (2.1) nicht hinreichend genau erfüllt war. Um mit der Methode der Differenzenpotentiale rechnen zu können, wurden die Normalableitungen gemittelt, indem der Ausdruck  $(\sum_{r \in \gamma^-} h)^{-1} \sum_{r \in \gamma^-} \psi_h^*(rh) h$  von jeder Ableitung subtrahiert wurde. Das Resultat dieser Mittelung kann der Tabelle 10 entnommen werden. Dabei werden mit  $\psi_h(rh)$  die in den Rechnungen verwendeten diskreten Normalableitungen bezeichnet.

Anzahl Gitterpunkte auf $\gamma_h^-$	$c$ -Norm der Lösung			$ \sum_{r \in \gamma^-} \alpha(rh) h $	
	$\forall rh \in \gamma_h^-$	$\forall rh \in \gamma_h^+$	$\forall mh \in G_h$	$\alpha(rh) = \psi_h^*(rh)$	$\alpha(rh) = \psi_h(rh)$
120	1.2675	1.2300	1.2300	2.89-3	5.50-12
248	1.2824	1.2634	1.2634	1.45-3	6.37-13
504	1.2899	1.2803	1.2803	7.26-4	1.02-12
1016	1.2936	1.2888	1.2888	3.63-4	1.02-11

Tab.10

Die Ergebnisse in der Tabelle 11 zeigen, daß im Vergleich zum Dirichletproblem ein qualitativer Unterschied im Lösungsverhalten vorhanden ist, verursacht durch den Diskretisierungsfehler in den Normalableitungen. Berechnet wurde eine Konvergenzgeschwindigkeit von  $O(h^\alpha)$  mit  $\alpha \approx 0.9$ .

Anzahl der Gitterpunkte auf $\gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $u_h(rh)$ , $rh \in \gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h$	$ u(x^*) - u_h(x^*) $	$ - \Delta_h u_h(x^*) $
120	2.12-3	1.46-3	3.21-4	7.28-9
248	1.07-3	7.71-4	5.68-7	1.75-7
504	5.49-4	4.13-4	3.95-5	3.17-6
1016	2.79-4	2.15-4	2.97-5	9.31-8

Tab.11  $x^* = (0.4, 0.4)$

In den folgenden zwei Beispielen hat die zu approximierende Lösung des kontinuierlichen Problems Randwerte, die in der Umgebung der Innenecke fast singulär sind. Auf diese Weise kommt bei den Berechnungen ein neuer Schwierigkeitsgrad hinzu.

### Beispiel 5:

Ausgehend von der Abbildung 5 wurde das innere Dirichletproblem

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h \\ u_h(rh) &= \varphi_h(rh) & \forall rh \in \gamma_h^- \end{aligned}$$

mit den diskreten Randwerten  $\varphi_h(rh) = \ln |rh - y|$  gelöst, bei dem der unveränderliche Punkt  $y = (-0.01, -0.01)$  in der Nähe der Innenecke liegt.

Auch bei diesem Beispiel ist zu beachten, daß die Funktion  $u(x) = \ln |x - y|$  eine Lösung der Differentialgleichung  $-\Delta u(x) = 0$  ist, während die Differenzengleichung nur näherungsweise erfüllt ist.

Anzahl der Gitterpunkte auf $\gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $\psi_h(rh)$ , $rh \in \gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h$	$ u(x^*) - u_h(x^*) $	$ \Delta_h u_h(x^*) $
123	2.59-1	1.37-3	2.84-3	2.09-7
251	1.99-1	4.69-4	2.04-5	1.85-6
507	1.17-1	1.18-4	6.29-5	4.29-6
1019	6.39-2	2.92-5	2.54-5	7.63-6

Tab.12  $x^* = (0.015625, 0.015625)$

Rein qualitativ unterscheiden sich die berechneten Werte von den in den Beispielen 1 und 3 angegebenen Fehlernormen. Dennoch ist für  $h \leq 0.0078125$  eine Konvergenzgeschwindigkeit von  $O(h^2)$  ermittelt worden.

Um zu verdeutlichen, wie sich die in der Nähe der Innenecke liegende Singularität der Logarithmusfunktion auf das Lösungsverhalten auswirkt, enthält die Tabelle 13 neben der  $c$ - Norm der Lösung  $u_h(mh)$  auch die  $c$ - Norm des Fehlers auf  $\gamma_h^+$ . Dieser Fehler tritt speziell in den Gitterpunkten auf, die den betragsmäßig kleinsten Abstand zum Punkt  $y$  haben.

Anzahl Gitterpunkte auf $\gamma_h^-$	$c$ -Norm der Lösung			$c$ -Norm des Fehlers auf $\gamma_h^+$
	$\forall rh \in \gamma_h^-$	$\forall rh \in \gamma_h^+$	$\forall mh \in G_h$	
123	4.4677	3.6657	3.6657	2.50-2
251	4.5818	4.0329	4.0329	1.25-2
507	4.5906	4.2711	4.2711	3.24-3
1019	4.6049	4.4273	4.4273	7.10-4

Tab.13

### Beispiel 6:

Untersucht wurde das zum Beispiel 5 gehörende innere Neumannproblem

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h \\ u_A(rh) &= h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_r} (u_h(rh) - u_h((r+k)h)) = \psi_h(rh) & \forall rh \in \gamma_h^-, \end{aligned}$$

bei dem die diskreten Normalableitungen  $\psi_h(rh)$  durch Mittelung aus den Ableitungen

$$\psi_h^*(rh) = \frac{(r_1 h - y_1)n_1(rh) + (r_2 h - y_2)n_2(rh)}{|rh - y|^2}$$

mit  $y = (-0.01, -0.01)$  hervorgehen. Da die zu approximierende Lösung in der Nähe der Innenecke fast singulär ist, bietet es sich in diesem Fall an, den Wert  $-\sum_{r \in \gamma_h^-} \psi_h^*(rh) h$  gleichmäßig auf die diskrete Normalableitung in der Innenecke und

in den beiden benachbarten Gitterpunkten von  $\gamma_h^-$  zu verteilen. Im Gegensatz zu den Beispielen 3 und 4 stimmt bei dem zuletzt betrachteten Dirichlet- und Neumannproblem der berechnete  $l_2$ -Fehler in den inneren Gitterpunkten annähernd überein. Daher erscheint die Art der Mittelung dem Problem angepaßt.

Anzahl der Gitterpunkte auf $\gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $u_h(rh)$ , $rh \in \gamma_h^-$	relativer $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h$	$ u(x^*) - u_h(x^*) $	$ \Delta_h u_h(x^*) $
123	2.48-3	2.60-3	3.58-3	3.28-7
251	9.91-4	8.06-4	1.40-3	2.38-6
507	4.16-4	2.19-4	2.98-4	1.43-6
1019	1.29-4	5.82-5	7.20-5	1.18-4

Tab.14  $x^* = (0.015625, 0.015625)$

Anhand der angegebenen Fehlernormen wurde für  $h \leq 0.0078125$  eine Konvergenzgeschwindigkeit von  $O(h^\alpha)$  mit  $\alpha \approx 1.9$  ermittelt. Die in den letzten zwei Beispielen vorgestellten Resultate zeigen, daß auch bei der Vorgabe schlechter Randdaten und grober Schrittweiten mit der Methode der Differenzenpotentiale sehr gute Ergebnisse erzielt werden können.

Anzahl Gitterpunkte auf $\gamma_h^-$	c-Norm der Lösung			$ \sum_{r \in \gamma_h^-} \alpha(rh) h $	
	$\forall rh \in \gamma_h^-$	$\forall rh \in \gamma_h^+$	$\forall mh \in G_h$	$\alpha(rh) = \psi_h^*(rh)$	$\alpha(rh) = \psi_h(rh)$
123	4.9277	3.6738	3.6738	3.92-2	1.82-12
251	4.6205	4.0371	4.0371	2.59-2	3.64-12
507	4.5974	4.2746	4.2746	8.84-3	1.82-12
1019	4.6071	4.4288	4.4288	2.63-3	1.82-12

Tab. 15



## 4.2 Lösung äußerer Randwertprobleme

Um einen ersten Eindruck von der Qualität der Lösung äußerer Randwertprobleme zu erhalten, wird zunächst ein Problem betrachtet, bei dem sowohl die Struktur des Gebietes als auch die zu approximierende Lösung relativ einfach ist.

### Beispiel 7:

Berechnet wurde in einem ausgewählten Teilgebiet des in Abbildung 7 angedeuteten Außengebietes die Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h^a \\ u_h(rh) &= \varphi_h^a(rh) & \forall rh \in \gamma_h^{a-} \end{aligned}$$

mit den Randwerten

$$\varphi_h^a(r_1h, r_2h) = r_1h * \left( (r_1h)^2 + (r_2h)^2 \right)^{-1}.$$

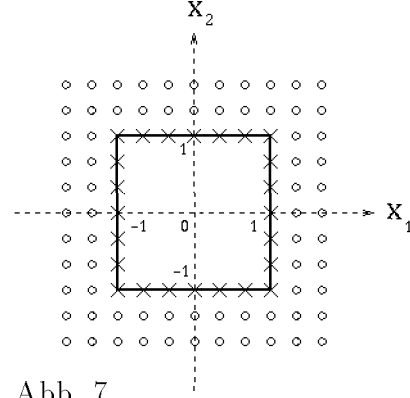


Abb. 7

In Abbildung 7 sind alle Gitterpunkte von  $\gamma_h^{a-}$  mit einem Kreuz gekennzeichnet. Zu beachten ist der Unterschied zur Randschicht  $\gamma_h^-$  eines inneren Problems. Die außerdem eingezeichnete Teilmenge der zu  $G_h^a$  gehörenden Punkte ist mit einem Kreis markiert. Konkret wurde die Lösung des Problems in allen Punkten  $mh \in G_h^1$  berechnet, wobei  $G_h^1 \subset G_h^a$  die Menge aller Gitterpunkte ist, die im Innern bzw. auf dem Rand des Quadrates mit den Eckpunkten  $(10, 10)$ ,  $(12, 10)$ ,  $(12, 12)$  und  $(10, 12)$  liegen. Die diskreten Normalableitungen auf  $\gamma_h^{a-}$  werden mit  $\psi_h^a(rh)$  bezeichnet.

Anzahl der Gitterpunkte auf $\gamma_h^{a-}$	rel. $l_2$ -Fehler von $\psi_h^a(rh)$ , $rh \in \gamma_h^{a-}$	abs. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	rel. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	abs. $c$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$
128	5.53-2	1.02-5	1.09-4	5.42-6
256	2.82-2	2.50-6	2.70-5	1.35-6
512	1.42-2	6.19-7	6.75-6	3.37-7
1024	7.16-3	1.54-7	1.69-6	8.42-8

Tab.16

Berechnet wurde eine Konvergenzgeschwindigkeit von  $O(h^2)$ . Anhand der Tabelle 17 erhält man einen Eindruck von der punktwisen Konvergenz der diskreten Lösung.

Anzahl Gitterpunkte auf $\gamma_h^{a-}$	$ u_h(mh) - u(mh) $ im Gitterpunkt				
	(1.25, 1.25)	(10, 10)	(40, 40)	(80, 80)	(150, 150)
128	2.56-5	5.27-6	1.37-6	6.87-7	3.66-7
256	6.50-6	1.35-6	3.42-7	1.71-7	9.12-8
512	1.63-6	3.37-7	8.53-8	4.27-8	2.28-8
1024	4.09-7	8.41-8	2.13-8	1.07-8	5.68-9

Tab.17

Wie effektiv äußere Randwertprobleme mit Hilfe von Differenzenpotentialen gelöst werden können, zeigt auch das dazugehörige Neumannproblem.

### Beispiel 8:

Ausgehend von Abbildung 7 wird das äußere Neumannproblem

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h^a \\ u_A(rh) &= h^{-1} \sum_{k \in K \setminus K_r^a} (u_h(rh) - u_h((r+k)h)) = \psi_h^a(rh) & \forall rh \in \gamma_h^{a-} \end{aligned}$$

mit den diskreten Normalableitungen

$$\psi_h^a(rh) = \frac{(r_2h)^2 - (r_1h)^2}{((r_1h)^2 + (r_2h)^2)^2} n_1^a(rh) - \frac{2r_1hr_2h}{((r_1h)^2 + (r_2h)^2)^2} n_2^a(rh)$$

betrachtet, wobei  $n_1^a(rh)$  und  $n_2^a(rh)$  die Komponenten des äußeren Normalenvektors  $\vec{n}^a(rh)$  in Bezug auf das Außengebiet sind.

Bei diesem Beispiel war es nicht notwendig, die Normalableitungen zu mitteln. Aus der Tabelle 18 geht hervor, wie genau die notwendige Bedingung (2.2) des Neumannproblems erfüllt ist. Anhand der in der Tabelle angegebenen Fehlernormen wurde eine Konvergenzgeschwindigkeit von  $O(h^2)$  ermittelt.

Anzahl der Gitterpunkte auf $\gamma_h^{a-}$	rel. $l_2$ -Fehler von $u_h(rh)$ , $rh \in \gamma_h^{a-}$	abs. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	rel. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	$ \sum_{r \in \gamma_h^{a-}} \psi_h^a(rh)h $
128	6.85-4	6.26-5	6.67-4	4.55-12
256	1.78-4	1.59-5	1.72-4	1.64-11
512	4.54-5	4.00-6	4.35-5	2.27-11
1024	1.15-5	1.00-6	1.10-5	4.73-11

Tab.18

Die Ergebnisse in Tabelle 19 ermöglichen den direkten Vergleich mit dem Dirichletproblem. Dabei zeigt sich, daß sowohl die Qualität der berechneten Lösungen als auch das asymptotische Verhalten annähernd übereinstimmt.

Anzahl Gitterpunkte auf $\gamma_h^{a-}$	$ u_h(mh) - u(mh) $ im Gitterpunkt				
	(1.25,1.25)	(10,10)	(40,40)	(80,80)	(150,150)
128	1.80-4	3.32-5	8.35-6	4.18-6	2.23-6
256	4.68-5	8.58-6	2.15-6	1.07-6	5.73-7
512	1.19-5	2.18-6	5.45-7	2.73-7	1.45-7
1024	3.01-6	5.48-7	1.37-7	6.86-8	3.66-8

Tab.19

Um auch bei äußeren Randwertproblemen den Effekt der Mittelung der Normalableitungen deutlich zu machen, werden die folgenden zwei Neumannprobleme sowie die dazugehörigen Dirichletprobleme betrachtet.

### Beispiel 9:

In Abbildung 8 ist das Außengebiet gekennzeichnet, in welchem das äußere Dirichletproblem mit den Randwerten

$$\varphi_h^a(r_1h, r_2h) = \frac{r_1h * r_2h}{((r_1h)^2 + (r_2h)^2)^2}$$

untersucht wurde.

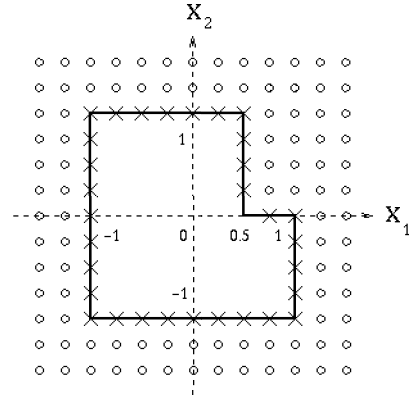


Abb. 8

Die Lösung ist speziell in den Gitterpunkten bestimmt worden, die im Inneren beziehungsweise auf dem Rand zweier Quadrate liegen. Dabei ist  $G_h^1 \subset G_h^a$  die Menge aller Gitterpunkte, die zu dem in der Nähe des Randes  $\gamma_h^a$  liegenden Quadrat mit den Eckpunkten  $(0.75, 0.25)$ ,  $(2.75, 0.25)$ ,  $(2.75, 2.25)$  und  $(0.75, 2.25)$  gehören, während die Gitterpunkte  $mh \in G_h^2 \subset G_h^a$  durch das Quadrat mit den Eckpunkten  $(40, 40)$ ,  $(42, 40)$ ,  $(42, 42)$  und  $(40, 42)$  definiert sind. Durch die spezielle Wahl dieser beiden Quadrate kann man der folgenden Tabelle entnehmen, wie genau die berechnete Lösung sowohl in der Nähe des Randes  $\gamma_h^a$  als auch bei hinreichend großer Entfernung vom Rand ist.

Gitterpunkte auf $\gamma_h^a$	rel. $l_2$ -Fehler von $\psi_h^a(rh)$ , $rh \in \gamma_h^a$	abs. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	abs. $c$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	abs. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^2$	abs. $c$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^2$
127	1.24-1	7.87-4	3.18-3	1.23-4	5.99-5
255	6.36-2	1.89-4	8.01-4	3.12-5	1.54-5
511	3.20-2	4.65-5	2.01-4	7.82-6	3.88-6
1023	1.61-2	1.15-5	5.02-5	1.96-6	9.75-7

Tab.20

Berechnet wurde eine Konvergenzgeschwindigkeit von  $O(h^2)$ . Anhand der Tabelle 21 erhält man ferner einen Überblick über die punktweise Konvergenz der Lösung.

Anzahl Gitterpunkte auf $\gamma_h^a$	$ u_h(mh) - u(mh) $ im Gitterpunkt				
	(0.75,0.25)	(10,10)	(40,40)	(80,80)	(150,150)
127	3.18-3	6.69-5	5.99-5	5.89-5	5.84-5
255	8.01-4	1.72-5	1.54-5	1.51-5	1.50-5
511	2.01-4	4.33-6	3.88-6	3.82-6	3.79-6
1023	5.02-5	1.09-6	9.75-7	9.58-7	9.51-7

Tab.21

### Beispiel 10:

Untersucht wurde das zum Beispiel 9 gehörende äußere Neumannproblem mit den durch Mittelung aus den Ableitungen

$$\begin{aligned}\psi_h^*(rh) &= \frac{r_2 h * ((r_1 h)^2 + (r_2 h)^2) - 4 (r_1 h)^2 r_2 h}{((r_1 h)^2 + (r_2 h)^2)^3} n_1^a(rh) \\ &+ \frac{r_1 h * ((r_1 h)^2 + (r_2 h)^2) - 4 (r_2 h)^2 r_1 h}{((r_1 h)^2 + (r_2 h)^2)^3} n_2^a(rh)\end{aligned}$$

hervorgehenden diskreten Normalableitungen  $\psi_h^a(rh)$ . Konkret wurde bei dieser Mittelung der Ausdruck  $(\sum_{r \in \gamma_h^a-} h)^{-1} \sum_{r \in \gamma_h^a-} \psi_h^*(rh) h$  von den Ableitungen in den einzelnen Gitterpunkten subtrahiert.

Gitterpunkte auf $\gamma_h^a-$	rel. $l_2$ -Fehler von $u_h(rh)$ , $rh \in \gamma_h^a-$	abs. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	abs. $c$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	abs. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^2$	abs. $c$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^2$
127	2.50-2	1.09-2	2.27-2	2.57-4	1.28-4
255	7.23-3	3.01-3	6.29-3	7.24-5	3.66-5
511	1.93-3	7.87-4	1.65-3	1.91-5	9.72-6
1023	4.99-4	2.01-4	4.21-4	4.90-6	2.50-6

Tab.22

Ein Vergleich mit den Fehlernormen vom Dirichletproblem zeigt, daß das Lösungsverhalten durch die Mittelung nur geringfügig beeinflußt wird. Das konkrete Ausmaß der Mittelung und die Differenz zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung in den auch beim Dirichletproblem betrachteten Gitterpunkten kann der Tabelle 23 entnommen werden.

Gitterpunkte auf $\gamma_h^a-$	$ u_h(mh) - u(mh) $ im Gitterpunkt					$ \sum_{r \in \gamma_h^a-} \alpha(rh) h $	
	(0.75,0.25)	(10,10)	(40,40)	(80,80)	(150,150)	$\alpha = \psi_h^*$	$\alpha = \psi_h^a$
127	2.27-2	5.23-4	1.28-4	6.37-5	3.39-5	2.19-2	2.44-12
255	6.29-3	1.49-4	3.66-5	1.82-5	9.69-6	6.36-3	4.09-12
511	1.65-3	3.97-5	9.72-6	4.85-6	2.58-6	1.71-3	3.52-12
1023	4.21-4	1.02-5	2.50-6	1.25-6	6.68-7	4.41-4	5.74-11

Tab.23

Man erkennt deutlich, daß der berechnete Fehler sowohl beim Halbieren der Schrittweite als auch bei der Entfernung der Gitterpunkte vom Rand  $\gamma_h^a-$  kleiner wird. Speziell bei den Rechnungen mit kleinerer Schrittweite wurde eine Konvergenzgeschwindigkeit von  $O(h^2)$  ermittelt.

Bisher wurde bei allen Beispielen eine Konvergenzgeschwindigkeit von  $O(h^2)$  erzielt. Obwohl diese Konvergenzgeschwindigkeit auch bei dem folgenden Dirichletproblem erreicht wird, konvergiert das dazugehörige Neumannproblem nur mit der Geschwindigkeit  $O(h)$ . Eine mögliche Ursache dafür ist der Diskretisierungsfehler in den Normalableitungen.

**Beispiel 11:**

Ausgehend von der Abbildung 8 wurde das äußere Dirichletproblem

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(mh) &= 0 & \forall mh \in G_h^a \\ u_h(rh) &= \varphi_h^a(rh) & \forall rh \in \gamma_h^{a-} \end{aligned}$$

mit den Randwerten

$$\varphi_h^a(r_1h, r_2h) = \sin\left(\frac{r_1h}{(r_1h)^2 + (r_2h)^2}\right) * \exp\left(\frac{r_2h}{(r_1h)^2 + (r_2h)^2}\right)$$

gelöst. In Analogie zu den Beispielen 9 und 10 wird der auftretende Fehler zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung hauptsächlich in den Gitterpunkten  $mh \in G_h^1$  und  $mh \in G_h^2$  berechnet.

Gitterpunkte auf $\gamma_h^{a-}$	rel. $l_2$ -Fehler von $\psi_h^a(rh)$ , $rh \in \gamma_h^{a-}$	abs. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	abs. $c$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	abs. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^2$	abs. $c$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^2$
127	1.24-1	1.12-3	3.58-3	1.64-4	7.97-5
255	6.59-2	2.71-4	9.10-4	4.11-5	2.03-5
511	3.39-2	6.71-5	2.28-4	1.03-5	5.10-6
1023	1.72-2	1.66-5	5.70-5	2.56-6	1.28-6

Tab.24

Um das Verhalten der Lösung in Abhängigkeit von der Entfernung der Gitterpunkte zum Rand  $\gamma_h^{a-}$  noch besser beurteilen zu können, wird das Spektrum der bereits in den vorhergehenden Beispielen betrachteten Gitterpunkte erweitert.

Gitterpunkte auf $\gamma_h^{a-}$	$ u_h(mh) - u(mh) $ im Gitterpunkt						
	(0.75,0.25)	(10,10)	(40,40)	(80,80)	(150,150)	(200,200)	(300,300)
127	3.02-3	9.33-5	7.97-5	7.76-5	7.66-5	7.64-5	7.61-5
255	7.58-4	2.37-5	2.03-5	1.97-5	1.95-5	1.94-5	1.93-5
511	1.90-4	5.96-6	5.10-6	4.96-6	4.90-6	4.88-6	4.87-6
1023	4.74-5	1.49-6	1.28-6	1.24-6	1.23-6	1.22-6	1.22-6

Tab.25

Man erkennt, daß sich bei fester Schrittweite  $h$  das Konvergenzverhalten der Lösung ab einer bestimmten Entfernung der Gitterpunkte vom Rand kaum verändert. Möglicherweise liegt das an der relativ schnellen Konvergenz der Lösung gegen Null, die auf Grund der Wahl der Randwerte sowohl im diskreten als auch im kontinuierlichen Fall zu erwarten ist.

### Beispiel 12:

Ferner wurde das zum Beispiel 11 gehörende äußere Neumannproblem studiert, so daß die Qualität der Lösungen mit dem Dirichletproblem verglichen werden kann. Dabei wurden die kontinuierlichen Normalableitungen, die in den Randpunkten  $rh \in \gamma_h^a$  durch Differentiation der Funktion

$$u(r_1h, r_2h) = \sin \left( \frac{r_1h}{(r_1h)^2 + (r_2h)^2} \right) * \exp \left( \frac{r_2h}{(r_1h)^2 + (r_2h)^2} \right)$$

entstehen, auf Grund der zu erfüllenden notwendigen Bedingung (2.2) gleichmäßig gemittelt. Während die Einschränkung der kontinuierlichen Normalableitungen auf das Gitter mit  $\psi_h^*(rh)$  bezeichnet wird, steht das Symbol  $\psi_h^a(rh)$  für die diskreten Normalableitungen, die bei den Berechnungen verwendet wurden. Aus der Tabelle 27 geht hervor, daß der Korrekturterm bei der gleichmäßigen Mittelung größer ist als der entsprechende Term im Beispiel 10. Wie dies das Lösungsverhalten beeinflusst, zeigen die folgenden Ergebnisse.

Gitterpunkte auf $\gamma_h^a$	rel. $l_2$ -Fehler von $u_h(rh)$ , $rh \in \gamma_h^a$	abs. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	abs. $c$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^1$	abs. $l_2$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^2$	abs. $c$ -Fehler von $u_h(mh)$ , $mh \in G_h^2$
127	1.27-1	1.32-1	2.23-1	2.96-3	1.47-3
255	6.26-2	6.39-2	1.09-1	1.45-3	7.32-4
511	3.11-2	3.14-2	5.35-2	7.17-4	3.65-4
1023	1.55-2	1.56-2	2.65-2	3.57-4	1.82-4

Tab.26

Aus den in dieser Tabelle angegebenen Fehlernormen wurde nur eine Konvergenzgeschwindigkeit von  $O(h)$  ermittelt. Ein Vergleich mit den Beispielen 10 und 11 zeigt, daß der hier berechnete  $l_2$ -Fehler selbst beim Gebiet  $G_h^2$  wesentlich größer ist. Das auffallend langsamere Konvergenzverhalten kommt auch in der folgenden Tabelle zum Ausdruck.

Gitterpunkte auf $\gamma_h^a$	$ u_h(mh) - u(mh) $ im Gitterpunkt					$ \sum_{r \in \gamma_h^a} \alpha(rh) h $	
	(0.75,0.25)	(10,10)	(40,40)	(80,80)	(150,150)	$\alpha = \phi_h^*$	$\alpha = \phi_h^a$
127	2.23-1	6.07-3	1.47-3	7.31-4	3.89-4	1.58-1	1.38-12
255	1.09-1	3.02-3	7.32-4	3.64-4	1.94-4	8.00-2	1.77-11
511	5.35-2	1.51-3	3.65-4	1.81-4	9.65-5	4.02-2	4.07-12
1023	2.65-2	7.52-4	1.82-4	9.06-5	4.82-5	2.02-2	1.38-11

Tab.27

Trotz des offensichtlichen Qualitätsverlustes im Vergleich zu den anderen Beispielen sind die erzielten Ergebnisse akzeptabel.

Sowohl die im Abschnitt 4.1 vorgestellten inneren Randwertprobleme als auch die äußeren Probleme aus dem Abschnitt 4.2 zeigen, wie vorteilhaft die Methode der Differenzenpotentiale praktisch eingesetzt werden kann. Es erscheint daher lohnenswert, das bisher nur zum Experimentieren verwendete Programm weiter aufzurüsten und nutzerfreundlicher zu gestalten.

Die Qualität der Lösungen in den betrachteten Beispielen hängt ganz entscheidend von der Genauigkeit der nur einmal zu berechnenden diskreten Fundamentallösung ab. Dabei ist zu beachten, daß die im Abschnitt 1.2.1 angegebene Summenformel zwar numerisch einfach realisiert werden kann, gleichzeitig aber äußerst instabil ist. Aus diesem Grund wurde von EHRHARDT ein Programm mit beliebiger Genauigkeit geschrieben. Um mit diesem Programm auch im Punkt  $(n, n)$  mit  $n = 256$  einen auf 10 Stellen genauen Wert für die Fundamentallösung zu erhalten, mußte selbst die in der Formel vorkommende Zahl  $\pi$  mit mehr als 120 Nachkommastellen berechnet werden.

Die Beispiele 1 und 2 sowie 5 und 6 sind 1995 von Gutachtern für einen *Benchmark-Test* innerhalb des DFG–Schwerpunktprogrammes *Randelementmethoden* vorgeschlagen worden. Da auch das Chemnitzer DFG–Projekt *Bimetallprobleme* zu diesem Schwerpunkt gehörte und einige der gestellten Aufgaben direkt mit Differenzenpotentialen bearbeitet werden können, wurden die erforderlichen Daten eingereicht. Ein Vergleich mit den Resultaten anderer Projekte war bis zur Fertigstellung dieser Arbeit leider nicht möglich.

Im Abschnitt 4.1 wurden zwei Beispiele mit fast singulären Randwerten in der Nähe einer Innenecke betrachtet. In Bezug auf die Singularität der Randdaten erscheint es nicht nur interessant theoretische Untersuchungen durchzuführen. In Analogie zu den obigen Beispielen sollten noch mehr Testbeispiele gerechnet werden, bei denen ein gezielter Vergleich mit anderen Lösungsmethoden angestrebt wird.

Konvergenzbetrachtungen für äußere Randwertprobleme sind im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt worden. Die Rechnungen im Abschnitt 4.2 vermitteln jedoch einen ersten qualitativen Eindruck von der Konvergenz der diskreten Lösung gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems.

Auf die Notwendigkeit der Mittelung der diskreten Normalableitungen wurde bereits bei den konkret betreffenden Neumannproblemen hingewiesen. Möglicherweise gelingt es im Rahmen der zukünftigen Arbeit mit der Methode der Differenzenpotentiale im voraus Aussagen treffen, mit welchem Verlust an Genauigkeit ab einem bestimmten Diskretisierungsfehler in den Normalableitungen zu rechnen ist.

# Literaturverzeichnis

- [AK] Andreev, V. B. ; Kryakvina, S. A.: *On the fundamental solution of one-parametered class of the difference approximations of the Laplace operator on plane*. Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. 13(1973), 343-355 (russ.)
- [Ba] Bachwalov, N. S.: *Über eine Möglichkeit der näherungsweisen Lösung der Laplacegleichung*. Doklady Akad. Nauk SSSR, 114(1957), No.3, 455-458 (russ.)
- [BHR] Boor, C. ; Höllig, K. ; Riemenschneider, S.: *Fundamental solutions for multivariate difference equations*. Amer. J. Math. 111(1989), 403-415
- [BHZ] Bramble, J. H. ; Hubbard, B. E. ; Zlamal, M.: *Discrete Analogues of the Dirichlet Problem with Isolated Singularities*. SIAM J. Numer. Anal. 5(1968), No.1, 1-25
- [BT] Bramble, J. H. ; Thomée, V.: *Pointwise Bounds for Discrete Green's Functions*. SIAM J. Numer. Anal. 6(1969), No. 4, 583-590
- [CFL] Courant, R. ; Friedrichs, K. ; Lewy, H.: *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*. Math. Ann. 100(1928), 32-74
- [Du1] Duffin, R. J.: *Basic properties of discrete analytic functions*. Duke Math. J. 23(1956), 335-363
- [Du2] Duffin, R. J.: *Discrete potential theory*. Duke Math. J. 20(1953), 233-251
- [Ehr] Ehrhardt, T.: *Zur Berechnung einer Fundamentallösung des diskreten Laplaceoperators in der Ebene*. Praktikumsbericht, TU Chemnitz, 1992
- [FW] Forsythe, G. E. ; Wasow, W. R.: *Finite- Difference Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley, New York 1960
- [GR] Gradstein, I. S. ; Ryshik, I. M.: *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*. Nauka, Moskau 1971
- [Guen] Guenter, N. M.: *Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik*. Teubner, Leipzig 1957



- [Gue1] Gürlebeck, K.: *Zur Berechnung von Fundamentallösungen diskreter Cauchy–Riemann–Operatoren*. ZAMM 74(1994) 6, T625-627
- [Gue2] Gürlebeck, K.: *Zur Theorie der Differenzenpotentiale*. ZAMM 75(1995), S II, 461-462
- [GH1] Gürlebeck, K. ; Hommel, A.: *On Fundamental Solutions of the Heat Conduction Difference Operator*. Z. Anal. Anw. 13(1994), No.3, 425-441
- [GH2] Gürlebeck, K. ; Hommel, A.: *Elemente einer diskreten Potentialtheorie*. ZAMM 75(1995), S II, 463-464
- [GS1] Gürlebeck, K. ; Sprößig, W.: *Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems*. Akademie–Verlag Berlin, Math. Research 56, 1989 und ISNM 89, Birkhäuser–Verlag Basel 1990
- [GS2] Gürlebeck, K. ; Sprößig, W.: *Quaternionic Calculus for Engineers and Physicists*. John Wiley & Sons, 1997
- [Ha] Hackbusch, W.: *Integralgleichungen. Theorie und Numerik*. Teubner, Leipzig 1989
- [HMW] Huy, C. U. ; McKenna, P. J. ; Walter, W.: *Finite Difference Approximations to the Dirichlet Problem for Elliptic Systems*. Numer. Math. 49(1986), 227-237
- [Je] Jentsch, L.: *Die Greensche Matrix für zwei aneinander reibungsfrei gleitende elastische Halbräume mit verschiedenen Laméschen Moduln*. ZAMM 58(1978), 209-224
- [Kae] Kähler, U.: *Berechnung einiger diskreter Fundamentallösungen von partiellen Differentialoperatoren im zweidimensionalen Fall*. Jahresarbeit, TU Chemnitz–Zwickau, 1994
- [KY] Kayano, T. ; Yamasaki, M.: *Discrete Dirichlet Integral Formula*. Discrete Appl. Math. 22(1988/89), 53-68
- [Kr] Kress, R.: *Linear Integral Equations*. Applied Mathematical Sciences 82, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1989
- [La] Laasonen, P.: *On the solution of Poisson’s difference equation*. J. Assoc. Comput. Mach. 5(1958), 370-382
- [Lan] Landkof, N. S.: *Foundations of modern potential theory*. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York 1972

- [LC] Lazarev, M. I. ; Chikin, V. N.: *The Calderon–Seely Projectors and the reduction of boundary value problems of elliptic operators to boundary equations*. Appendix II in Michlin / Morozov / Paukshto: "The Integral Equations of the Theory of Elasticity". Teubner–Texte zur Math. 135, Teubner, Stuttgart–Leipzig 1995
- [MMY] Maeda, F.-Y. ; Murakami, A. ; Yamasaki, M.: *Discrete initial value problems and discrete parabolic potential theory*. Hiroshima Math. J. 21(1991), 285-299
- [Mei] Meister, E.: *Integral Equations for the Fourier– Transformed Boundary Values for the Transmission Problems for Right– Angled Wedges and Octants*. Math. Meth. in the Appl. Sci. 8(1986), 182-205
- [Mi] Michlin, S. G.: *Lehrgang der mathematischen Physik*. Akademie–Verlag, Berlin 1972
- [MP] Michlin, S. G. ; Prössdorf, S.: *Singuläre Integraloperatoren*. Akademie–Verlag, Berlin 1980
- [Mu] Murazawa, T.: *Discrete Potential and its Properties I*. Sci. Rep. Kyoto Pref. Univ. (Nat. Sci– Liv. Sci) No.33 (1982), Ser. A, 1-8
- [Pet] Petrowski, I. G.: *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen*. Teubner, Leipzig 1955
- [PR] Pfeifer, E. ; Rauhöft, A.: *Über Grundlösungen von Differenzenoperatoren*. Z. Anal. Anw. 3(1984), 227-236
- [RRST] Reznik, A.A. ; Ryabenkij, V. S. ; Sofronov, I. L. ; Turchaninov, V. I.: *The Algorithm of the Method of Difference Potentials*. U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. 25(1985), No.5 , 144-151
- [Ry1] Ryabenkij, V. S.: *The method of Difference Potentials for some Problems of Continuum Mechanics*. Nauka, Moskau 1987 (russ.)
- [Ry2] Ryabenkij, V. S.: *Difference Potentials Method and its Applications*. Math. Nachr. 177(1996), 251-264
- [Ry3] Ryabenkij, V. S.: *Faithful Transfer of Difference Boundary Conditions*. Funct. Anal. Appl. 24(1990), No.3, 251-253
- [Sam] Samarskij, A. A.: *Theorie der Differenzenverfahren*. Nauka, Moskau 1977 (russ.)
- [See] Seeley, R. T.: *Singular integrals and boundary value problems*. Amer. J. Math. 88(1966), No.4, 781-809

- [SLM] Samarskij, A. A. ; Lasarow, R. D. ; Makarow, W. L.: *Differenzenverfahren für Differentialgleichungen mit verallgemeinerten Lösungen*. Hochschulverlag, Moskau 1987 (russ.)
- [Sm1] Smirnow, W. I.: *Lehrgang der höheren Mathematik Band IV*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966
- [Sm2] Smirnow, W. I.: *Lehrgang der höheren Mathematik Band V*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967
- [So1] Sobolev, S. L.: *Über die Eindeutigkeit der Lösung von Differenzengleichungen des elliptischen Typs*. Doklady Akad. Nauk SSSR 87(1952), No.2, 179-182 (russ.)
- [So2] Sobolev, S. L.: *Über eine Differenzengleichung*. Doklady Akad. Nauk SSSR 87(1952), No.3, 341-343 (russ.)
- [Sof] Sofronov, I. L.: *Nondegeneracy of the equations related to the method of difference potentials*. Funct. Anal. Appl. 18(1984), 347-349
- [Stoe] Stöhr, A.: *Über einige lineare partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten II*. Math. Nachr. 3(1949/50), 295-316
- [Stu] Stummel, F.: *Elliptische Differenzenoperatoren unter Dirichletrandbedingungen*. Math. Zeitschr. 97(1967), 169-211
- [Th1] Thomée, V.: *Discrete interior Schauder estimates for elliptic difference operators*. SIAM J. Numer. Anal. 5(1968), No.3, 626-645
- [TW] Thomée, V. ; Westergren, B.: *Elliptic Difference Equations and Interior Regularity*. Numer. Math. 11(1968), 196-210
- [vdP] Van der Pol, B.: *The finite-difference analogy of the periodic wave equation and the potential equation*. Appendix IV in Probability and Related Topics in Physical Sciences, Marc Kac, Interscience Publishers, New York 1957
- [Wla] Wladimirow, W. S.: *Gleichungen der mathematischen Physik*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972
- [Wlo] Wloka; J.: *Partielle Differentialgleichungen*. Teubner, Leipzig 1982
- [Zem] Zemla, A.: *On the fundamental solutions for the difference Helmholtz operator*. SIAM J. Numer. Anal. 32(1995), No.2, 560-570

## Thesen zur Dissertation

# Fundamentallösungen partieller Differenzenoperatoren und die Lösung diskreter Randwertprobleme mit Hilfe von Differenzenpotentialen

zur Erlangung des akademischen Grades eines “Doctor rerum naturalium“ an der Fakultät für Bauingenieurwesen der Bauhaus-Universität Weimar, vorgelegt von Diplommathematiker **Angela Hommel** in Weimar am 11. Juni 1997

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zum Aufbau einer in sich geschlossenen Theorie der Differenzenpotentialen, mit deren Hilfe Differenzenrandwertprobleme gelöst werden können. Die grundlegende Idee der klassischen Potentialtheorie besteht im Lösen von Gleichungen auf dem Rand, bei denen die Äquivalenz zum betrachteten Ausgangsproblem erhalten bleibt. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Übertragung der Idee der Randreduktion auf Differenzenrandwertprobleme. Dabei steht nicht die Wahl von geeigneten Quadraturformeln zur Lösung der Randintegralgleichungen im Mittelpunkt, sondern das Aufstellen linearer Gleichungssysteme auf dem Rand, die zum diskreten Randwertproblem äquivalent sind. Als Ausgangspunkt der Überlegungen sind hauptsächlich die Resultate von Ryabenkij zu betrachten.

1. Die wichtigste Voraussetzung für den Aufbau einer diskreten Potentialtheorie ist die Existenz einer diskreten Fundamentallösung oder Greenschen Funktion. Ist  $A_h$  ein Differenzenoperator des  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raumes und  $\mathbb{R}_h^n = \{i_1h, i_2h, \dots, i_nh\}$  mit  $i_k \in \mathbb{Z}$  und  $k = 1, \dots, n$  das betrachtete gleichmäßige Gitter der Schrittweite  $h$ , dann heißt jede Lösung der Gleichung

$$(A_h u_h)(x) = \delta_h(x) = \begin{cases} h^{-n} & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

diskrete Fundamentallösung, wenn sie im Unendlichen nicht schneller als  $|x|^m$  wächst. Die Potenz  $m > 0$  hängt von der konkreten Gestalt des Differenzenoperators ab. Berechnet werden die diskreten Fundamentallösungen mittels diskreter Fouriertransformation. Für einige der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Differenzengleichungen liegen bereits Existenzaussagen in bezug auf die diskrete Fundamentallösung vor, erzielt im Bildbereich der diskreten Fouriertransformation. Für die praktische Anwendung der Methode der Differenzenpotentialen ist es jedoch wichtig, diese Fundamentallösungen auch hinreichend genau und effektiv berechnen zu können. Dafür geeignete Verfahren werden im Kapitel 1 vorgestellt.

2. Da der Aufbau der diskreten Potentialtheorie im Kapitel 2 dieser Arbeit am Beispiel der Laplacegleichung in der Ebene erfolgt, werden die Eigenschaften der entsprechenden diskreten Fundamentallösung ausführlich studiert. Zu diesen Eigenschaften gehört beispielsweise die Beschränktheit der diskreten Fundamentallösung für feste Schrittweite  $h$ , die in jedem beschränkten Gebiet gezeigt werden kann. Das Verhalten der bis auf eine Konstante eindeutig bestimmten Fundamentallösung wird ferner durch das folgende Resultat beschrieben. Es sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet und  $G_h = (G \cap \mathbb{R}_h^2)$  das entsprechende diskrete Gebiet. Wird die Differenz zwischen der diskreten Fundamentallösung  $E_h^1(x)$  und der kontinuierlichen Fundamentallösung  $E(x)$  nur in den Gitterpunkten  $x \in G_h^* = \{x \in G_h \setminus (0,0)\}$  betrachtet, dann erhält man für jede Schrittweite  $h \leq e^{-1}$  die Fehlerabschätzung

$$\|E_h^1(x) - E(x)\|_{l_p(G_h^*)} \leq \begin{cases} Ch & 1 \leq p < 2 \\ Ch \sqrt{|\ln h|} & p = 2 \\ Ch^{2/p} & 2 < p < \infty. \end{cases}$$

3. Ein enormer Fortschritt beim Aufbau der Theorie der Differenzenpotentiale wird durch die Aufspaltung des Randpotentials in ein diskretes Einfach- und Doppelschichtpotential erzielt. Vor allem wird das bei Ryabenkij auftretende Problem überbestimmter linearer Randgleichungssysteme bewältigt. Die Beschreibung der einzelnen Potentiale beruht auf folgender Symbolik: Es sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit stückweise glattem Rand. In Analogie zur Herangehensweise von Ryabenkij wird das diskrete Gebiet  $G_h = (G \cap \mathbb{R}_h^2)$  mit der doppelten diskreten Randschicht  $\gamma_h$  betrachtet. Dabei besteht die innere Randschicht  $\gamma_h^+$  aus den inneren Gitterpunkten  $mh \in G_h$ , die mindestens einen benachbarten Punkt  $mh + kh$  mit  $k \in K = \{(0,0); (1,0); (-1,0); (0,1); (0,-1)\}$  haben, der auf dem Rand des Gebietes  $G$  beziehungsweise außerhalb liegt. Umgekehrt gehören zur äußeren Randschicht  $\gamma_h^-$  alle Gitterpunkte  $mh \in \mathbb{R}_h^2$ , die außerhalb beziehungsweise auf dem Rand von  $G$  liegen und mindestens einen benachbarten Gitterpunkt im Gebiet  $G_h$  haben. Für die Lösung  $u_h$  der Poissongleichung

$$-\Delta_h u_h(mh) = \sum_{k \in K} a_k u_h(mh - kh) = f_h(mh)$$

mit den Koeffizienten  $a_k \in \{-1/h^2, 4/h^2\}$  erhält man unter Verwendung der diskreten Fundamentallösung  $E_h(x)$  in den Gitterpunkten  $lh \in G_h \cup \gamma_h^-$  die Darstellung

$$\sum_{rh \in \gamma_h} \left( \sum_{k \in K_r} E_h(lh - (r+k)h) a_k h^2 \right) u_h(rh) + \sum_{mh \in G_h} E_h(lh - mh) f_h(mh) h^2 = u_h(lh).$$

Dabei ist  $K_r = \{k \in K : rh + kh \notin G_h\}$ . Werden die Randwerte in den Gitterpunkten  $rh \in \gamma_h^-$  mit  $u_R(rh)$  und die diskreten Normalableitungen mit

$u_A(rh)$  bezeichnet, dann erhält man eine explizite Zerlegung des Potentials in der Form  $\sum_{rh \in \gamma_h} \left( \sum_{k \in K_r} E_h(lh - (r+k)h) a_k h^2 \right) u_h(rh) = (P_h^E u_h)(lh) - (P_h^D u_h)(lh)$  mit dem Einfachschichtpotential

$$(P_h^E u_h)(lh) = \sum_{rh \in \gamma_h^-} u_A(rh) E_h(lh - rh) h$$

und dem diskreten Doppelschichtpotential

$$(P_h^D u_h)(lh) = \sum_{rh \in \gamma_h^-} \sum_{k \in K \setminus K_r} (E_h(lh - rh) - E_h(lh - (r+k)h)) u_R(rh) - \kappa u_R(lh),$$

wobei  $\kappa = 0$  für alle  $lh \in G_h$  und  $\kappa = 1$  für  $lh \in \gamma_h^-$  gilt. Diese Aufspaltung des Potentials ist eines der Hauptresultate in dieser Arbeit, auf deren Grundlage alle notwendigen potentialtheoretischen Eigenschaften bewiesen werden.

4. Wesentlich für den weiteren Aufbau der Theorie der Differenzenpotentiale ist sowohl die Formulierung von diskreten Greenschen Formeln als auch die Untersuchung der Eigenschaften der diskreten Potentiale in Innen- und Außengebieten. In Analogie zur klassischen Potentialtheorie wird in dieser Arbeit gezeigt, daß die Potentiale  $P_h^E u_h$  und  $P_h^D u_h$  diskret harmonische Funktionen im Gebiet  $G_h$  sind. Im Außengebiet ist das Potential der Einfachschicht im allgemeinen keine diskret harmonische Funktion, bedingt durch das annähernd logarithmische Verhalten der diskreten Fundamentallösung. Das Potential der Doppelschicht hingegen besitzt diese Eigenschaft. Betont sei ferner, daß die einzelnen Differenzenpotentiale auch als Quadraturformeln zur Berechnung der kontinuierlichen Potentiale betrachtet werden können. Diese Möglichkeit wird jedoch im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter untersucht.
5. Unter Verwendung der ersten Greenschen Formel können Eindeutigkeitssätze für diskrete Dirichlet- und Neumannprobleme in Innen- und Außengebieten bewiesen werden. Von fundamentaler Bedeutung ist dabei die Eigenschaft, daß die Differenzenableitung erster Ordnung einer im ebenen Außengebiet diskret harmonischen Funktion  $u_h(mh)$  im Unendlichen wie  $1/|mh|^2$  fällt. Während im kontinuierlichen Fall der Beweis der äquivalenten Eigenschaft mit Hilfe der Kelvintransformation oder auch auf funktionentheoretischem Weg geführt werden kann, ist bei der Arbeit auf dem Gitter  $\mathbb{R}_h^2$  eine völlig neue Herangehensweise erforderlich. Da die zu beweisende Aussage in Verbindung mit den Eindeutigkeitssätzen auch die Grundlage für die Sätze zur Lösbarkeit der entstehenden Randgleichungssysteme bildet, ist die im Kapitel 2 vorgestellte neue Beweismethode als ein wichtiges Werkzeug zur analytischen Untersuchung der diskreten Operatorgleichungen zu betrachten.
6. Am Ende von Kapitel 2 werden Lösbarkeitsaussagen für die durch geeignete Potentialansätze entstehenden linearen Randgleichungssysteme bewiesen. Diese Aussagen ermöglichen die unmittelbare praktische Anwendung der Methode

der Differenzenpotentiale zur Lösung innerer- und äußerer Differenzenrandwertprobleme, die auf der Laplacegleichung in der Ebene beruhen. Da sich die einzelnen Potentialansätze ausschließlich auf das diskrete Einfachschichtpotential beziehen, ist beim Lösen von Dirichletproblemen auf Grund des annähernd logarithmischen Verhaltens der diskreten Fundamentallösung eine Veränderung im Potentialansatz notwendig. Diese Besonderheit ist für den ebenen Fall charakteristisch. Im Rahmen dieser Arbeit wird speziell der zweidimensionale Fall untersucht, weil er im Vergleich zum dreidimensionalen Fall theoretisch wesentlich anspruchsvoller ist und in der numerischen Anwendung eine größere Sorgfalt erfordert. Im dreidimensionalen Fall fällt sowohl die diskrete Fundamentallösung, als auch deren Ableitungen im Unendlichen, so daß weder bei der Arbeit mit den Greenschen Formeln, noch bei der Bearbeitung äußerer Randwertprobleme theoretische Schwierigkeiten auftreten werden.

7. Im Kapitel 3 wird die gleichmäßige Beschränktheit der Operatoren gezeigt und das Konvergenzverhalten der diskreten Potentiale untersucht. Im Mittelpunkt steht dabei sowohl das Potential der Einfachschicht, als auch das beim Lösen der Poissongleichung eine Rolle spielende diskrete Volumenpotential. Die einzelnen Konvergenzaussagen werden hauptsächlich in den Räumen  $c$  und  $l_p$  mit  $1 \leq p < \infty$  bewiesen. Setzt man voraus, daß die Dichte  $v_h$  des diskreten Einfachschichtpotentials  $P_h^E v_h$  in allen Gitterpunkten  $lh \in \gamma_h^-$  mit der Dichte  $v$  des klassischen Einfachschichtpotentials  $P^E v$  übereinstimmt, dann erhält man beispielsweise im Fall  $v \in C^{0,\alpha}(\Gamma^D)$  mit  $0 < \alpha \leq 1$  für  $h \leq e^{-1}$  die Abschätzung

$$\|P_h^E v_h - P^E v\|_{c(\gamma_h^-)} \leq C(h |\ln h| + h^\alpha) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma^D)}.$$

Dabei wird mit  $\Gamma^D$  der Rand bezeichnet, der durch die achsenparallele Verbindung aller Randgitterpunkte entsteht.

8. Die Konvergenz der Lösung des Differenzenrandwertproblems gegen die Lösung des entsprechenden kontinuierlichen Problems wird in Verbindung mit den Resultaten von Samarskij bewiesen. Diese Herangehensweise ist auf Grund der Äquivalenz zwischen der Lösbarkeit des diskreten Randwertproblems und der Lösbarkeit des Gleichungssystems auf dem Rand möglich. Voraussetzung ist jedoch in beiden Fällen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Für das Gleichungssystem auf dem Rand werden diese Eigenschaften im Kapitel 2 bewiesen.
9. Ein entscheidender Vorteil der im Rahmen dieser Arbeit beschriebenen Methode zur Lösung diskreter Randwertprobleme besteht darin, daß die erzielten theoretischen Erkenntnisse unmittelbar praktisch realisiert werden können. Betont sei, daß neben dem Fehler, der bei der Diskretisierung des kontinuierlichen Randwertproblems entsteht, kein weiterer Diskretisierungsfehler auftritt. Die

Qualität der Lösungen wird jedoch sehr stark durch die Genauigkeit der nur einmal zu berechnenden diskreten Fundamentallösung beeinflusst. Im Kapitel 4 wird eine Auswahl der numerisch gelösten Beispiele vorgestellt. Diese Beispiele zeigen, daß mit der Methode der Differenzenpotentiale auch bei der Vorgabe "schlechter" Randdaten und grober Schrittweiten  $h$  sehr gute Ergebnisse erzielt werden.

10. Die vorliegende Arbeit kann in verschiedener Hinsicht weiterentwickelt werden. Ein Schwerpunkt ist die Übertragung der Theorie der Differenzenpotentiale auf allgemeinere Randwertprobleme. Als Grundlage dafür werden im Kapitel 1 diskrete Fundamentallösungen für Problemstellungen ganz unterschiedlicher Art berechnet. Während beim Aufbau der diskreten Potentialtheorie beispielsweise die Definition des Volumenpotentials und die Idee der Aufspaltung des Differenzenpotentials in ein diskretes Einfach- und Doppelschichtpotential unmittelbar übernommen werden kann, ist ein Teil der Konvergenzanalyse in Abhängigkeit von den vorgegebenen Randbedingungen neu zu erarbeiten.
11. Andererseits kann die auf der diskreten Laplacegleichung beruhende Theorie weiter ausgebaut werden. Naheliegend ist die Formulierung von Sätzen zur Lösung diskreter Randwertprobleme mit Hilfe des Doppelschichtpotentials. Im Unterschied zur kontinuierlichen Potentialtheorie besteht die Schwierigkeit darin, daß speziell die für diskrete Dirichletprobleme zu beweisenden Aussagen nicht aus den zum Neumannproblem adjungierten Gleichungen folgen. Aus diesem Grund ist im Unterschied zur klassischen Potentialtheorie auf eine völlig neue Beweistechnik zu orientieren. Studieren kann man ferner das Konvergenzverhalten des diskreten Doppelschichtpotentials, wobei auch Aussagen für äußere Randwertprobleme von Interesse sind.

Die Konvergenz der Lösung des Differenzenrandwertproblems wird bisher in Verbindung mit den Resultaten von Samarskij bewiesen. Ein eigenständiger Konvergenzbeweis und ein damit verbundener Stabilitätsbeweis sind jedoch von entscheidender Bedeutung, wenn bei der Bearbeitung von anderen Differenzenrandwertproblemen nicht von der Kenntnis der entsprechenden Aussagen ausgegangen werden kann.

Zwei der im letzten Kapitel vorgestellten Beispiele zeigen, daß mit der Methode der Differenzenpotentiale auch bei Vorgabe fast singulärer Randdaten gerechnet werden kann. Ein Schwerpunkt für zukünftige Untersuchungen ist in der Erarbeitung der dazugehörigen theoretischen Grundlagen zu sehen.

Die Methode der Differenzenpotentiale kann zum Lösen allgemeiner linearer partieller Differentialgleichungen angewendet werden. Sehr vorteilhaft erweist sie sich zum Beispiel bei der Bearbeitung der Potentialgleichung (Laplacegleichung), der Bipotentialgleichung (Plattengleichung), der Wärmeleitgleichung, aber auch bei Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie sowie bei Bewegungs- und Schwingungsgleichungen.



## Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit in Kenntnis der strafbaren Folgen einer eidesstattlichen Falschaussage an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten, Methoden und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Angela Hommel

Weimar, den 18. Juni 1997

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name	Hommel, Angela geb. Bernhardt
Geburtsdatum	01.07.1965
Geburtsort	Herrnhut
Wohnort	Carl- von- Ossietzky- Straße 26 09126 Chemnitz
Nationalität	deutsch
Familienstand	verheiratet, 2 Kinder

## Schulbildung

Sept. 1972– Aug. 1980	Polytechnische Oberschule Obercunnersdorf
Sept. 1980– Aug. 1982	Erweiterte Oberschule „Geschwister Scholl“ Löbau
Sept. 1982– Aug. 1984	Spezialklasse für Mathematik und Physik an der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt (jetzt Technische Universität Chemnitz-Zwickau)

## Studium

Sept. 1984– Aug. 1989	Mathematikstudium an der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt/Chemnitz Sprachabschlüsse: SKA IIb Englisch SKA IIa Russisch
-----------------------	--

## Wissenschaftlicher Werdegang

1987	Betriebspraktikum bei SKET Magdeburg im Rahmen des Forschungsprojektes „Temperaturfelder und Spannungsverteilungen“
1987/88	Jahresarbeit zum Thema „Numerische Berechnung von Temperaturfeldern bei abgesetzten Wellen“
1988/89	Arbeit am Diplom zum Thema „Die Methode des Mass- Lumping in Zylinderkoordinaten“

## Beruflicher Werdegang

Sept. 1989– Sept. 1995	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz- Zwickau, Verpflichtungen in Lehre und Ausbildung, Arbeit an der Dissertation ruhendes Arbeitsverhältnis für ein Jahr (Babyjahr)
Okt. 1995–Feb. 1997	Mutterschutz und Erziehungsurlaub
seit Feb. 1997	Arbeit am Thema „Mathematische Modellierung des Verhaltens von Bindebaustoffen“ an der Bauhaus- Universität Weimar